

© А. В. КАВРАЙСКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЫ

Предметом теории картографических проекций являются математические способы изображения эллипсоида вращения или сферы на плоскости. Решаемая практическая задача — это изображение земной поверхности в плоскости географической карты, а эллипсоид, или в частном случае сфера, принимаются в качестве математически определенной фигуры, моделирующей земную поверхность. В чисто геометрическом отношении задача для случая сферы состоит в изображении двумерной поверхности постоянной кривизны, существующей в трехмерном евклидовом («плоском») пространстве, на плоской двумерной поверхности.

В данной статье приводится опыт моделирования трехмерной сферы в четырехмерном пространстве и изображения ее методами математической картографии на трехмерной «плоскости», т. е. в трехмерном евклидовом пространстве. Далее данный опыт обобщается для сферы n измерений.

На наш взгляд, такой опыт не является отвлеченным математическим упражнением. Как известно, в космологии и теории относительности рассматривается гипотеза кривизны пространства наблюдаемой Вселенной ([4], с. 252; [5]). В книге В. Паули «Теория относительности» [4] приводятся формулы расчета линейного элемента ds на сфере n измерений, являющейся «гиперповерхностью» в евклидовом пространстве $n + 1$ измерений ([4], с. 79):

$$ds^2 = \sum_i (dx_i)^2 + (dx_{n+1})^2, \quad (1)$$

$$\sum_i (x_i)^2 + (x_{n+1})^2 = a^2, \quad (2)$$

$$r^2 = \sum_i (x_i)^2, \quad (3)$$

где ds — линейный элемент, принадлежащий сфере n измерений, dx_i — соответствующие ему приращения прямоугольных координат x_i евклидова пространства $n + 1$ измерений, a — радиус кривизны сферы n измерений, r — его проекция на экваториальную плоскость сферы ($x_{n+1} = 0$), индекс i принимает значения от 1 до n .¹

Для расчета ds применяется и прием изображения сферического пространства на «плоском». Для этого приводится другая форма выражения линейного элемента ds , которая получается с помощью так называемых «римановых нормальных координат» y_i . Эту координатную систему получают путем проведения из какой-либо произвольной точки P_0 пространства всех геодезических линий. Тогда положению любой точки P пространства будет соответствовать только одна геодезическая линия P_0P ([4], с. 72). Взаимосвязь координат x_i и y_i определена выражениями ([4], с. 80):

$$\rho^2 \sum_i (y_i)^2, \quad (4)$$

$$x_i = \frac{r}{\rho} y_i, \quad (5)$$

¹ В книге В. Паули [1] символ последовательности i указан в формулах в виде верхнего индекса. Здесь и далее применяется общепринятое написание — нижний индекс.

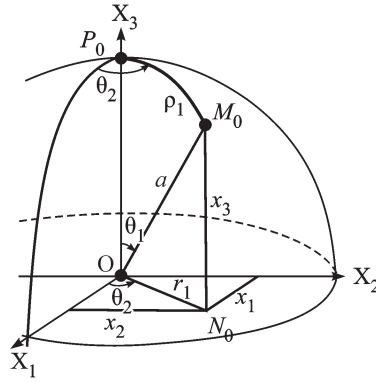


Рис. 1. Двухмерная сфера в евклидовом пространстве 3 измерений. Точка M_0 сферы и ее сферические координаты.

$$\frac{r}{\rho} = \frac{a}{\rho} \sin \frac{\rho}{a}, \quad (6)$$

$$x_{n+1} = a \cos \frac{\rho}{a}, \quad (7)$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \frac{\rho}{a} \sum (dy_i)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \frac{\rho}{a} \right) \left(\sum_i y_i dy_i \right)^2. \quad (8)$$

Согласно формуле (4), ρ — это длина геодезической линии P_0P .

По формуле (8)¹ вычисляется линейный элемент $ds(y)$, который должен быть равен элементу $ds(x)$, заданному приращениями координат x в формуле (1), однако в формуле (8) отсутствует индекс $n + 1$, т. е. вычисления выполняются в пространстве с числом измерений, на 1 меньшим, чем по формуле (1).

Сравнение формул (4)—(8) римановых нормальных координат y_i и картографической проекции двухмерной сферы на плоскость. Геометрический смысл приведенных формул наглядно иллюстрируется, если принять размерность сферической «гиперповерхности» $n = 2$, т. е. рассмотреть пример для поверхности шара в трехмерном ($n + 1 = 3$) евклидовом пространстве (рис. 1). Тогда формула (2) принимает вид $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$, т. е. является уравнением обычной сферы.

Точку сферы, в которой расположен бесконечно малый линейный элемент ds , обозначим M_0 . Из формулы (3) и рис. 1 получим $r_1^2 = x_1^2 + x_2^2$, где r_1 — радиус-вектор проекции N_0 точки M_0 на экваториальную плоскость сферы. Геодезическими линиями, образующими систему «римановых нормальных координат» y_i , будут в данном случае дуги больших кругов сферы, исходящие из точки P_0 . На рис. 1 ρ_1 — это длина дуги P_0M_0 сферы. Данной дуге соответствует угол (полярное расстояние)

$$\theta_1 = \frac{\rho_1}{a}, \quad (9)$$

являющийся одной из двух сферических координат, задающих положение точки в двухмерном сферическом пространстве. Вторую сферическую координату обозначим θ_2 и построим изображение параллели сферы с точкой M_0 в плоскости нормальной ази-

¹ В книге В. Паули ([4], с. 80) в формуле (128) выражение $y^i dy^i$ в правой части приведено без знака суммирования, что в общепринятом понимании лишает его конкретного значения. Замечание о том, что знак суммирования в подобных выражениях может быть опущен (но подразумевается) приведено в § 8 книги на стр. 43.

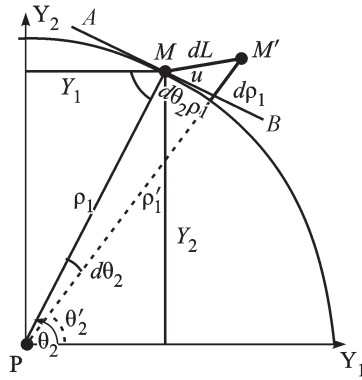


Рис. 2. Изображения M точки M_0 и $dL = MM'$ элемента сферы ds в плоскости азимутальной равнопромежуточной проекции.

мутальной равнопромежуточной проекции (Постеля) в системе декартовых координат PY_1Y_2 (рис. 2). Масштаб μ_0 в центральной точке P проекции принимаем равным 1, вследствие чего частный масштаб в точках проекции равен увеличению длин c . Точкой M изображается точка M_0 , отрезком $MM' = dL$ — конечный малый отрезок $M_0M'_0$ на сфере, моделирующий линейный элемент ds .

Из рис. 1 и 2 получим: $\rho_1 = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}$, $\frac{Y_i}{\rho_1} = \frac{x_i}{r_1}$ и, следовательно, $x_i = \frac{r_1}{\rho_1} Y_i$.

Согласно выражениям (4), (5),

$$\rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \quad x_i = \frac{r}{\rho} y_i.$$

Таким образом, выражения системы координат y_i , примененной в книге Паули [4] для исследования свойств многомерных пространств, идентичны выражениям координат Y_i нормальной азимутальной равнопромежуточной проекции. Исходя из этого можно предположить, что $y_1 = Y_1$, $y_2 = Y_2$, $dy_1 = dY_1$, $dy_2 = dY_2$ и координаты y_i можно считать прямоугольными координатами нормальной проекции Постеля, по крайней мере для $n = 2$.

Если это заключение справедливо, то отрезок $dL = \sqrt{dY_1^2 + dY_2^2}$ (рис. 2) является изображением линейного элемента ds в плоскости построенной проекции и, следовательно,

$$ds = \frac{dL}{c} \quad (10)$$

и должны выполняться соотношения

$$ds(x) = ds(y) = ds(Y) = \frac{dL}{c}, \quad (11)$$

где $ds(x)$, $ds(y)$ и $ds(Y)$ — линейный элемент ds , вычисленный по формулам (1), (8) и (10) соответственно, c — масштаб в азимутальной равнопромежуточной проекции по произвольному направлению.

Выполнение соотношений (11) может быть проверено путем моделирования линейного элемента ds на сфере 2 (и более) измерений и решения численных примеров по формулам (1), (8) и (10).

Модель линейного элемента ds должна отвечать условиям:

— линейная протяженность отрезка $M_0M'_0$, моделирующего ds , должна быть достаточно мала относительно радиуса сферы a , так чтобы в расчетах адекватно заменять теоретический бесконечно малый линейный элемент;

— отрезок $M_0M'_0$, моделирующий ds в пространстве $n + 1$ измерений, должен принадлежать сфере n измерений.

Для соблюдения данных условий отрезок $M_0M'_0$ задается в примерах близкими по значениям сферическими координатами точек $M_0(\theta_1\theta_2)$ и $M'_0(\theta'_1\theta'_2)$. Сферическим координатам соответствуют прямоугольные x_i (рис. 1), x'_i и их приращения $dx_i = x'_i - x_i$. По этим данным и формуле (1) вычисляется контрольная величина линейного элемента $ds(x)$.

Выведем формулы для вычисления величин, входящих в соотношение (11).

Для подстановки в формулу (8) требуются величины y_i, dy_i . Из формулы (5) с учетом обозначений, принятых на рис. 1 и 2, следует:

$$x_i + dx_i = \frac{r_1 + dr_1}{\rho_1 + d\rho_1} (y_i + dy_i), \quad (12)$$

$$y_i = \frac{\rho_1}{r_1} x_i. \quad (13)$$

Обозначая $r_1 + dr_1 = r'_1$, $\rho_1 + d\rho_1 = \rho'_1$ из выражений (12), (13), получим

$$dy_i = \frac{r'_1}{\rho'_1} dx_i + x_i \left(\frac{\rho'_1}{r'_1} - \frac{\rho_1}{r_1} \right) \quad (14)$$

Заметим, что полученные формулы (13) и (14), как и исходная формула (5), верны для любых значений n .

Формулы расчета величины c для подстановки в выражение (10) выведем из известной в теории искажений формулы ([2], с. 115):

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a_e^2} \cos^2 u + \frac{1}{b_e^2} \sin^2 u, \quad (15)$$

где a_e, b_e — большая и малая полуоси эллипса искажений, u — угол между большой полуосью и направлением в плоскости проекции, по которому рассчитывается увеличение.

Для нормальной проекции Постеля $a_e = c_p$, а $b_e = 1$, где c_p — масштаб по параллели, определяемый формулой

$$c_p = \frac{\theta_1}{\sin \theta_1}. \quad (16)$$

Согласно формуле (15), получим

$$c = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{c_p^2} \cos^2 u + \sin^2 u}}. \quad (17)$$

Из рис. 1 с учетом формулы (16) следуют соотношения

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{a \sin \theta_1}{a \theta_1} = \frac{\sin \theta_1}{\theta_1} = \frac{a}{\rho_1} \sin \frac{\rho_1}{a} = \frac{1}{c_p}, \quad (18)$$

и в результате получим

$$c = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{\rho_1^2} \sin^2 \frac{\rho_1}{a}\right) \cos^2 u + \sin^2 u}}. \quad (19)$$

На рис. 2 большая полуось эллипса искажений AB , согласно свойствам проекции, касательна к параллели в точке M и нормальна к радиусу изображения параллели. Учитывая малость ds (и соответственно dL) из рисунка, получим для подстановки в (19):

$$u = \operatorname{arctg} \frac{d\rho_1}{d\theta_2 \cdot \rho_1}. \quad (20)$$

Если элемент ds расположен по параллели, то $c = c_p$.

Решение примеров для проверки выполнения соотношений (11) при $n = 2$. Моделируется бесконечно малый линейный элемент ds на сфере 2 измерений, построенной в евклидовом («плоском») пространстве 3 измерений. Вычисляется длина ds по координатам x_i пространства 3 измерений, по изображению dL элемента ds в равнопромежуточной азимутальной проекции и по римановым нормальным координатам y_i .

Исходные данные. Радиус сферы $a = 1$. На сфере положение точки задается полярным расстоянием θ_1 от условного «полюса» P_0 и углом θ_2 от начального направления (рис. 1). Сферические координаты точек $M_0(\theta_1, \theta_2)$ и $M'_0(\theta'_1, \theta'_2)$, определяющих положение линейного элемента $ds = M_0M'_0$, приведены в табл. 1. В примере 2 принято $\theta'_1 = \theta_1$ и элемент ds должен совпадать с параллелью.

Последовательность вычислений и рабочие формулы. 1. Вычисление декартовых прямоугольных координат концов элемента ds .

Из рис. 1, полагая, что на поверхности сферы вблизи точки M_0 лежит точка M'_0 и $M_0M'_0 = ds$, получим:

$$\begin{aligned} r_1 &= a \cdot \sin \theta_1, \quad x_1 = r_1 \cdot \cos \theta_2, \quad x_2 = r_1 \cdot \sin \theta_2, \quad x_3 = a \cdot \cos \theta_1; \\ r'_1 &= a \sin \theta'_1, \quad x'_1 = r'_1 \cdot \cos \theta'_2, \quad x'_2 = r'_1 \cdot \sin \theta'_2, \quad x'_3 = a \cos \theta'_1. \end{aligned}$$

2. Контрольные вычисления, показывающие, что линейный элемент $ds \cong M_0M'_0$ находится в пределах сферы, заданной радиусом a (в данном примере — на поверхности двумерной сферы).

$$S_x = \sum_{i=1}^3 x_i^2, \quad S'_x = \sum_{i=1}^3 (x'_i)^2.$$

Должны выполняться равенства $S'_x = S_x = a^2$.

Таблица 1

Сферические координаты точек $M_0M'_0$

Сферические координаты	Значения сферических координат в примерах 1—5				
	1	2	3	4	5
θ_1	48°	48°	91°	155°	80°
θ'_1	48.003°	48°	91.003°	155.004°	80.003°
θ_2	30°	30°	130°	−80°	−170°
θ'_2	30.002°	30.002°	130.002°	−80.002°	−170.002°

Таблица 2

Результаты вычислений в примерах 1—5

Вычисляемая величина	Значения вычисляемых величин, полученные в примерах 1—5				
	1	2	3	4	5
$ds(x) \cdot 10^8$	5843	2594	6293	7135	6264
$ds(Y) \cdot 10^8$	5843	2594	6293	7135	6264
$ds(y) \cdot 10^8$	5843	2594	6293	7136	6264
$dL(Y) \cdot 10^8$	5997	2924	7626	11744	7153
$dL(y) \cdot 10^8$	5997	2924	7626	11744	7153
u°	60.8	0	43.4	36.5	47.1
c	1.026	1.127	1.212	1.646	1.142
c_p	1.127	1.127	1.588	6.401	1.418

3. Вычисление величины линейного элемента $ds(x)$.

$$dx_1 = x'_1 - x_1, dx_2 = x'_2 - x_2, dx_3 = x'_3 - x_3, ds(x) = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}.$$

4. Вычисление длины элемента dL , изображающего элемент сферы ds в нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции Постеля (рис. 2).

$$\rho_1 = a \cdot \theta_1 \cdot \text{arcP}^\circ, Y_1 = \rho_1 \cdot \cos \theta_2, Y_2 = \rho_1 \cdot \sin \theta_2;$$

$$\rho'_1 = a \cdot \theta'_1 \cdot \text{arcP}^\circ, Y'_1 = \rho'_1 \cdot \cos \theta'_2, Y'_2 = \rho'_1 \cdot \sin \theta'_2,$$

$$dY_1 = Y'_1 - Y_1, dY_2 = Y'_2 - Y_2, dL(Y) = \sqrt{dY_1^2 + dY_2^2}$$

5. Вычисление масштаба c по произвольному направлению и масштаба c_p по параллели в нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции.

$d\rho_1 = \rho'_1 - \rho_1, d\theta_2 = \theta'_2 - \theta_2, u$ — по формуле (20), c — по формуле (19), c_p — по формуле (16).

6. Вычисление величины линейного элемента $ds(Y)$ по его проекции $dL(Y)$.

$$ds(Y) = \frac{dL(Y)}{c}.$$

7. Вычисление величины линейного элемента $ds(y)$ по формулам Паули и величины $dL(y)$.

y_1, y_2, dy_1, dy_2 — по формулам (13) и (14); $ds(y)$ — по формуле (8), принимая $\rho = \rho_1$; $dL(y) = \sqrt{dy_1^2 + dy_2^2}$.

Результаты вычислений. В результате расчетов получено для всех примеров $S_x = S'_x = 1$. Остальные вычисленные величины приведены в табл. 2.

Анализ полученных данных. 1. Выполнение условия $S'_x = S_x = a^2$ подтверждает принадлежность линейного элемента ds поверхности двумерной сферы с радиусом $a = 1$.

2. Практическое совпадение величин $ds(Y)$ и $ds(x)$ в данных примерах (с точностью до 8-го десятичного знака) является достаточно тривиальным, так как фактически выполнялись изображение линейного элемента поверхности шара в плоскости картографической проекции по ее известным формулам и вычисление неискаженной длины этого элемента с использованием зависимостей теории искажений.

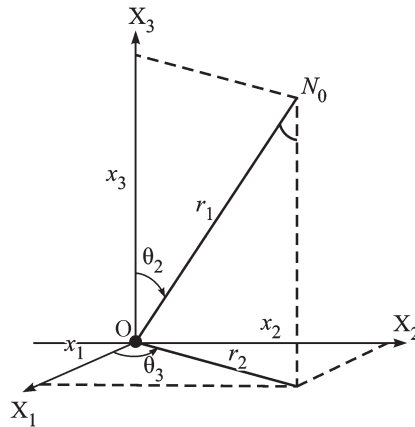


Рис. 3. Трехмерная «экваториальная плоскость» трехмерной сферы.

3. Совпадение величин $ds(y)$ и $ds(x)$ подтверждает для $n = 2$ корректность интерпретации формулы Паули для римановых нормальных координат y выражением (8), так как вычисление ds по различным «формам линейного элемента» ([4], с. 80) должно давать идентичные результаты по определению.

4. Совпадение величин $ds(y)$ и $ds(Y)$, а также величин $dL(y)$ и $dL(Y)$ подтверждает предположение, что соотношения, описываемые формулами (1)–(8), относящимися к математическому аппарату теории многомерных пространств ([4], с. 79, 80), по крайней мере для трехмерного пространства ($n = 2$, $n + 1 = 3$) адекватно выражаются зависимостями из математической картографии.

5. В примере 2 в соответствии с исходными данными получили $c = c_p$.

Моделирование трехмерной сферы и ее проекции на трехмерное евклидово пространство. Увеличим размерность пространства n на 1 и рассмотрим модель сферы n измерений, радиуса a в евклидовом пространстве $n + 1$ измерений для $n = 3$, $n + 1 = 4$. Геометрия этого пространства выражается теми же формулами (1)–(8), в которых n может принимать любые значения. Составим формулы, описывающие эту модель через связь сферических и прямоугольных декартовых координат.

Если на двухмерной сфере положение точки задается двумя угловыми величинами θ_1 и θ_2 (см. выше), то логично принять, что на трехмерной сфере потребуются три величины. Обозначим их:

- угол (дуга) θ_1 — полярное расстояние от условного «полюса»;
- углы θ_2 и θ_3 от условных начальных направлений.

Угловой величине θ_1 при заданном радиусе сферы a должна соответствовать линейная величина ρ_1 :

$$\rho_1 = a\theta_1. \quad (21)$$

Геометрический смысл данных величин проявляется, если прибегнуть к расширению понятия «картографическая проекция» от плоского изображения (в двумерном евклидовом пространстве) на пространственное изображение (в трехмерном евклидовом пространстве). Графическими иллюстрациями такого изображения служат рис. 3 и 4, являющиеся аналогами рис. 1 и 2, построенных для двухмерной сферы. Поскольку для трехмерной сферы, являющейся фигурой четырехмерного пространства, невозможно построить рисунок, полностью аналогичный рис. 1, на рис. 3 изображена «трехмерная экваториальная плоскость» трехмерной сферы. К декартовым координатам x_1 и x_2 экваториальной плоскости на рис. 1 добавлена координата x_3 , к сферической координате θ_2 — сферическая координата θ_3 .

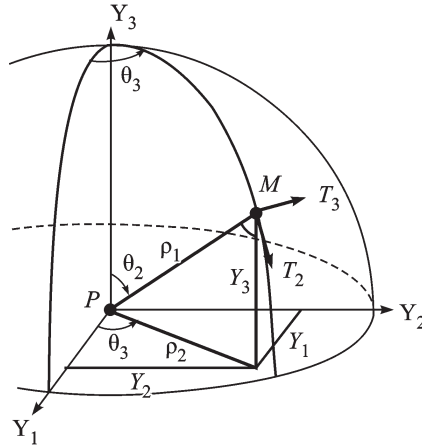


Рис. 4. «Азимутальная равнопромежуточная проекция» трехмерной сферы в трехмерное евклидово («плоское») пространство.

Рис. 4 показывает «азимутальную равнопромежуточную проекцию» трехмерной сферы, существующей в четырехмерном пространстве, на трехмерное евклидово («плоское») пространство $PY_1Y_2Y_3$. По аналогии с двумерной проекцией (рис. 2) прямоугольные координаты проекции обозначаем здесь Y_1, Y_2, Y_3 . Точка M на рис. 4 является изображением точки M_0 трехмерной сферы — точки, в которой исследуется линейный элемент ds , ρ_1 — геодезическая линия, определяющая положение точки M_0 на трехмерной сфере. Радиус-вектор проекции точки M на экваториальную плоскость обозначим ρ_2 .

Итак, получена достаточно убедительная, на наш взгляд, аналогия:

— точка с координатами θ_1 и θ_2 **двухмерной** сферы радиуса a , построенной в трехмерном евклидовом пространстве (рис. 1), изображается на двумерном евклидовом пространстве плоскими полярными координатами $\rho_1 = a\theta_1$ и θ_2 (рис. 2);

— точка с координатами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ **трехмерной** сферы радиуса a , построенной в четырехмерном евклидовом пространстве (на рисунке непредставимо), изображается «на трехмерном евклидовом пространстве» пространственными полярными координатами $\rho_1 = a\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (рис. 4).

Далее, для трехмерной сферы в четырехмерном пространстве по формулам (2) и (3) и из рис. 3 получим соответственно:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2, \quad (22)$$

$$r_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (23)$$

По формулам (6), (7) и (21), принимая $\rho = \rho_1, r = r_1$ получим:

$$r_1 = a \cdot \sin \theta_1, \quad (24)$$

$$x_4 = a \cdot \cos \theta_1 \quad (25)$$

Из рис. 3 получим также

$$r_2 = r_1 \cdot \sin \theta_2, x_1 = r_2 \cdot \cos \theta_3, x_2 = r_2 \cdot \sin \theta_3, x_3 = r_1 \cdot \cos \theta_2. \quad (26)$$

Выведем также формулы искажения длины s линейного элемента ds , аналогичные формулам (19), (20), но свойственные получаемой «пространственной проекции». Из

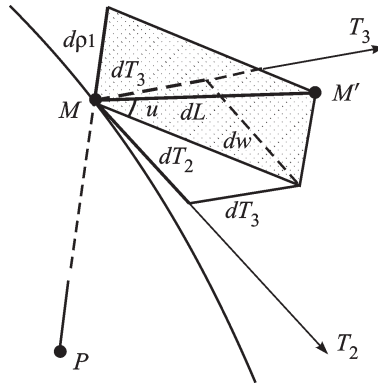


Рис. 5. Элементы эллипсоида искажений.

сравнения рис. 2 («плоская проекция») и рис. 4 («пространственная проекция») видно, что роль параллели плоской проекции, проходящей через заданную точку $M(\rho_1, \theta_2)$, в пространственной проекции играет сфера, проходящая через точку $M(\rho_1, \theta_2, \theta_3)$. Весьма наглядными и убедительными для такой сферы представляются следующие допущения.

1. Масштаб длин для отрезков, совпадающих с поверхностью этой «сферы-параллели», постоянен, равен c_p и определяется формулой (16) $c_p = \frac{\theta_1}{\sin \theta_1}$.

2. Отрезок dL , являющийся изображением линейного элемента ds , исходящий из точки $M(\rho_1, \theta_2, \theta_3)$, может находиться на поверхности сферы либо занимать положение по любому направлению в пространстве под углом u к плоскости, касательной к поверхности сферы в точке M .

3. Роль эллипса искажений длин в точке M в данном случае играет «эллипсоид искажений» — эллипсоид вращения с полуосями $a_e = c_p, b_e = 1$ (ось вращения). Экваториальная окружность этого эллипсоида с радиусом a_e находится в плоскости T_2MT_3 (рис. 4), касающейся сферы-параллели и нормальной к ее радиусу ρ_1 в точке M .

4. Угол u (рис. 5) между экваториальной плоскостью эллипсоида искажений и линейным элементом dL определяет увеличение длин c по тому же закону, как и угол u относительно большой полуоси эллипса искажений для «двухмерной» проекции. Поэтому для вычисления масштаба c по произвольному направлению u в пространстве применима формула (19). Такое допущение особенно убедительно, если мысленно провести плоскость через малую полуось эллипсоида и линейный элемент dL . В сечении получим эллипс с полуосями a_e, b_e .

На рис. 5 показано взаимное положение экваториальной плоскости T_2MT_3 эллипсоида искажений, отрезка $MM' = dL$ и вспомогательных отрезков $d\rho_1, dT_2, dT_3, dw$, определяемых приращениями координат $\rho_1, \theta_2, \theta_3$ от M к M' . Положение осей MT_2 и MT_3 , лежащих в экваториальной плоскости T_2MT_3 эллипсоида искажений, показано также на рис. 4. Согласно рис. 4 и 5, учитывая малость dL и то, что плоскость T_2MT_3 нормальна к PM , получим:

$$dT_2 = \rho_1 \cdot d\theta_2; dT_3 = \rho_1 \cdot d\theta_3 \cdot \cos \theta_2; dw = \sqrt{dT_2^2 + dT_3^2}; \operatorname{tg} u = \frac{d\rho_1}{dw};$$

$$u = \arctg \frac{d\rho_1}{\sqrt{(d\theta_2 \cdot \rho_1)^2 + (d\theta_3 \cdot \rho_1 \cdot \sin \theta_2)^2}}. \quad (27)$$

Таблица 3

Сферические координаты точек $M_0 M'_0$

Исходные сферические координаты	Значения n и значения координат в примерах 6—9			
	6 $n = 3$	7 $n = 3$	8 $n = 4$	9 $n = 10$
θ_1	120°	48°	155°	40°
$d\theta_1$	0.003°	0°	0.004°	0.003°
α_i	179°	30°	–80°	130°
$d\alpha_i$	0.002°	0.002°	–0.002°	0.003°
β_i	–139°	10°	25°	80°
$d\beta_i$	–0.004°	0.004°	0.003°	0.004°

Как отмечено выше, искажение длины произвольно расположенного линейного элемента может вычисляться для данной модели по формуле (19):

$$c = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{a^2}{\rho_1^2} \sin^2 \frac{\rho_1}{a}\right) \cos^2 u + \sin^2 u}}.$$

Формулы вычисления прямоугольных координат Y «пространственной» проекции сферы 3 измерений на «плоскость» 3 измерений получим из рис. 4 с учетом выражения (21):

$$\rho_1 = a \cdot \theta_1, \rho_2 = \rho_1 \cdot \sin \theta_2,$$

$$Y_1 = \rho_2 \cdot \cos \theta_3, Y_2 = \rho_2 \cdot \sin \theta_3, Y_3 = \rho_1 \cdot \cos \theta_2. \quad (28)$$

Аналогично тому, как было сделано выше (для $n = 2, n + 1 = 3$), проверим для случая $n = 3, n + 1 = 4$ выполнение соотношений $ds(x) = ds(y) = ds(Y) = \frac{dL}{c}$, где $dL = \sqrt{dY_1^2 + dY_2^2 + dY_3^2}$ является изображением линейного элемента ds четырехмерного пространства в «плоскости» построенной трехмерной проекции.

Решение примеров для проверки выполнения соотношений (11) при $n = 3$. Моделируется бесконечно малый линейный элемент ds на сфере 3 измерений, построенной в евклидовом пространстве 4 измерений. Вычисляются длины ds по координатам x_i пространства 4 измерений, по изображению dL элемента ds в равнопромежуточной азимутальной проекции и по римановым нормальным координатам y_i .

Исходные данные. Радиус сферы $a = 1$. На сфере положение точки задается полярным расстоянием θ_1 от условного «полюса» и углами θ_2 и θ_3 . Сферические координаты точек $M_0(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ и $M'_0(\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$, определяющих положение линейного элемента $ds = M_0 M'_0$, приведены в табл. 3 (примеры 6, 7).

Последовательность вычислений и рабочие формулы. 1. Вычисление декартовых прямоугольных координат концов элемента ds по формулам (24—26) и рис. 3.

$$r_1 = a \cdot \sin \theta_1, r_2 = r_1 \cdot \sin \theta_2;$$

$$r'_1 = a \cdot \sin \theta'_1, r'_2 = r'_1 \cdot \sin \theta'_2;$$

$$x_1 = r_2 \cdot \cos \theta_3, x_2 = r_2 \cdot \sin \theta_3, x_3 = r_1 \cdot \cos \theta_2, x_4 = a \cdot \cos \theta_1;$$

$$x'_1 = r'_2 \cdot \cos \theta'_3, x'_2 = r'_2 \cdot \sin \theta'_3, x'_3 = r'_1 \cdot \cos \theta'_2, x'_4 = a \cdot \cos \theta'_1.$$

2. Контрольные вычисления, показывающие, что линейный элемент $ds \cong M_0 M'_0$ находится в пределах пространства сферы, заданной радиусом a (в данном примере — на «поверхности» трехмерной сферы).

$$S_x = \sum_{i=1}^4 x_i^2, S'_x = \sum_{i=1}^4 (x'_i)^2.$$

Должны выполняться равенства $S'_x = S_x = a^2$.

3. Вычисление величины линейного элемента ds по координатам x_i пространства 4 измерений в соответствии с формулой (1).

$$dx_1 = x'_1 - x_1, dx_2 = x'_2 - x_2, dx_3 = x'_3 - x_3, dx_4 = x'_4 - x_4;$$

$$ds(x) = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}.$$

4. Вычисление длины элемента dL , изображающего элемент сферы ds в трехмерной нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции (рис. 4).

$$\rho_1 = a \cdot \theta_1 \cdot \text{arcP}, \rho_2 = \rho_1 \cdot \sin \theta_2;$$

$$\rho'_1 = a \cdot \theta'_1 \cdot \text{arcP}, \rho'_2 = \rho'_1 \cdot \sin \theta'_2;$$

$$Y_1 = \rho_2 \cdot \cos \theta_3, Y_2 = \rho_2 \cdot \sin \theta_3, Y_3 = \rho_1 \cdot \cos \theta_2;$$

$$Y'_1 = \rho'_2 \cdot \cos \theta'_3, Y'_2 = \rho'_2 \cdot \sin \theta'_3, Y'_3 = \rho'_1 \cdot \cos \theta'_2;$$

$$dY_i = Y'_i - Y_i, dL(Y) = \sqrt{dY_1^2 + dY_2^2 + dY_3^2}.$$

5. Вычисление масштаба c по произвольному направлению в трехмерной нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции.

$d\rho_1 = \rho'_1 - \rho_1, d\theta_2 = \theta'_2 - \theta_2, d\theta_3 = \theta'_3 - \theta_3, u$ — по формуле (27), c — по формуле (19).

6. Вычисление величины линейного элемента $ds(Y)$ по его проекции $dL(Y)$.

$$ds(Y) = \frac{dL(Y)}{c}.$$

7. Вычисление величины линейного элемента $ds(y)$ по формулам Паули и величины $dL(y)$.

$y_1, y_2, y_3, dy_1, dy_2, dy_3$ — по формулам (13) и (14); $ds(y)$ — по формуле (8), принимая $\rho = \rho_1$;

$$dL(y) = \sqrt{dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2}.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 4 (примеры 6, 7). Полученные результаты подтверждают справедливость соотношений (11) для $n = 3$ и позволяют сделать следующее заключение. Если принять гипотезу о том, что реальное пространство Вселенной является пространством с постоянной кривизной, т. е. сферой 3 изме-

Таблица 4

Результаты вычислений в примерах 6—10

Вычисляемая величина	Значения вычисляемых величин, полученные в примерах 6—9			
	6 $n = 3$	7 $n = 3$	8 $n = 4$	9 $n = 10$
$ds(x) \cdot 10^8$	6047	3669	7486	8757
$ds(Y) \cdot 10^8$	6047	3669	7486	8757
$ds(y) \cdot 10^8$	6047	3669	7486	8757
$dL(Y) \cdot 10^8$	8996	4136	18654	9249
$dL(y) \cdot 10^8$	8996	4136	18654	9249
u°	35.6	0	22.0	34.5
c	1.488	1.127	2.492	1.056
c_p	2.418	1.127	6.401	1.086

рений ([4], с. 252), то для наблюдаемых объектов имеет место искажение величин их поперечников согласно соотношениям:

$$p_{\text{наб}} = p_{\text{ист}} c_p, \quad c_p = \frac{\theta_1}{\sin \theta_1} = \frac{\rho_1}{a} : \sin \frac{\rho_1}{a}, \quad (29)$$

где $p_{\text{наб}}$ — величина поперечника, полученная из наблюдений, $p_{\text{ист}}$ — истинная величина поперечника, c_p — увеличение длин на «сфере-параллели» трехмерного сферического пространства, ρ_1 — расстояние до объекта, a — радиус кривизны сферической Вселенной. При этом необходимо отметить, что ввиду «исключительно большого» радиуса кривизны мира по сравнению, например, с размерами Солнечной системы ([4], с. 253) указанный эффект может быть существенным только для объектов, отстоящих на расстоянии, сравнимые с величиной a : например, при $\rho_1 = 0.1 \cdot a$ получим $c_p - 1 = 0.002$.

Моделирование сферы n измерений и ее проекции на n -мерную «плоскость». Как показано выше для $n = 2$ и $n = 3$, соотношения, описываемые формулами (1) и (8) ([4], с. 79, 80), относящимися к математическому аппарату теории многомерных пространств, путем введения сферических координат адекватно выражаются зависимостями из математической картографии. Соотношения (1)—(8) по определению позволяют получать линейный элемент $ds(y)$ при любых целых, сколь угодно больших, значениях n . Поэтому представляет интерес, на наш взгляд, и аппарат, который позволял бы для любых n вычислять:

— величины x_i по сферическим координатам θ_i на сфере n измерений, являющейся «гиперповерхностью» в евклидовом пространстве $n + 1$ измерений;

— величины Y, dL, u, c нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции сферы n измерений на n -мерную «плоскость»;

— линейный элемент $ds(Y) = \frac{dL(Y)}{c}$ для случая n -мерной сферы.

Из анализа формул, полученных для $n = 2$ и $n = 3$, выведены соответствующие зависимости, обобщенные для любых значений n .

Вычисление прямоугольных пространственных координат x_i .

$$r_1 = a \cdot \sin \theta_1. \quad (30)$$

При значениях i от 2 до $n-1$

$$r_i = r_{i-1} \sin \theta_i. \quad (31)$$

При значениях i от 1 до n ,

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } i=1, \text{ то } x_i = r_{n-1} \cos \theta_n; \\ \text{если } i=2, \text{ то } x_i = r_{n-1} \sin \theta_n; \\ \text{если } i>2, \text{ то } x_i = r_{n+1-i} \cos \theta_{n+2-i}; \end{array} \right\} \quad (32)$$

$$x_{n+1} = a \cos \theta_1. \quad (33)$$

Вычисление прямоугольных координат Y_i .

$$\rho_1 = a \cdot \theta_1 \cdot \text{arc} 1^\circ. \quad (34)$$

При значениях i от 2 до n

$$\rho_i = \rho_{i-1} \sin \theta_i. \quad (35)$$

При значениях i от 1 до n ,

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } i=1, \text{ то } Y_i = \rho_{n-1} \cos \theta_n; \\ \text{если } i=2, \text{ то } Y_i = \rho_{n-1} \sin \theta_n; \\ \text{если } i>2, \text{ то } Y_i = r_{n+1-i} \cos \theta_{n+2-i}. \end{array} \right\} \quad (36)$$

Вычисление угла u .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Если } n=2, \text{ то } u = \text{arctg} \frac{d\rho_1}{\sqrt{(d\theta_2 \cdot \rho_1)^2}}; \\ \text{если } n \geq 3, \text{ то } u = \text{arctg} \frac{d\rho_1}{\sqrt{(d\theta_2 \cdot \rho_1)^2 + \sum_{i=3}^n (d\theta_i \cdot \rho_{i-2} \cdot \sin \theta_{i-1})^2}}. \end{array} \right\} \quad (37)$$

Формулы (30)—(36) позволяют по заданным сферическим координатам θ_i точки M_0 n -мерной сферы вычислить координаты x_i и Y_i . При вычислениях, относящихся к точке M'_0 принимается $r'_1 = a \sin \theta'_1$, и всем переменным, входящим в формулы (31)—(36), придается верхний индекс «штрих».

Легко убедиться, что ранее полученные формулы для $n=2$ и $n=3$ являются частным случаем формул (30)—(37).

Решение примеров для проверки выполнения соотношений (11) при значениях $n > 2$. Моделируется бесконечно малый линейный элемент ds на сфере n измерений, построенной в евклидовом пространстве $n+1$ измерений. Вычисляется длина ds по координатам x_i пространства $n+1$ измерений, по изображению dL элемента ds в равнопромежуточной азимутальной проекции и по римановым нормальным координатам y_i .

Исходные данные. Радиус сферы $a=1$. На сфере положение точки задается сферическими координатами θ_i для значений i от 1 до n . Сферические координаты точек $M_0(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n)$ и $M'_0(\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3, \dots, \theta'_n)$, определяющих положение линейного элемента $ds=M_0M'_0$, задаются данными табл. 3 и приводимыми ниже условиями.

Для $i=1$: $\theta'_1 = \theta_1 + d\theta_1$. При значениях i от 2 до n : $\theta_i = \alpha_i$, $d\theta_i = d\alpha_i$ для четных значений i , $\theta_i = \beta_i$, $d\theta_i = d\beta_i$ для нечетных значений i , $\theta'_i = \theta_i + d\theta_i$.

Данные условия позволяют для любого заданного значения n автоматически генерировать n значений θ . Отдельно задаваемое значение θ_1 позволяет вводить условие $\theta'_1 = \theta_1$ для получения примера, где $c = c_p$. Повторяемость (через одно) значений θ в

примерах не нарушает, на наш взгляд, общности решения задачи. В примере 7 принято $\theta_1 = \theta_1$ и элемент ds совпадает со «сферой-параллелью».

Последовательность вычислений и рабочие формулы. 1. Вычисления r_i, r'_i, x_i и x'_i по формулам (30)—(33) для i от 1 до $n + 1$.

2. Контрольные вычисления, показывающие, что линейный элемент $ds \cong M_0 M'_0$ находится в пределах пространства сферы n измерений, заданной радиусом a .

$$S_x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2, S'_x = \sum_{i=1}^{n+1} (x'_i)^2.$$

Должны выполняться равенства $S'_x = S_x = a^2$.

3. Вычисление величины линейного элемента $ds(x)$ по координатам x_i пространства $n + 1$ измерений в соответствии с формулой (1).

$$dx_i = x'_i - x_i, ds(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2}.$$

4. Вычисление длины элемента $dL(Y)$, изображающего элемент сферы ds в n -мерной «нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции (Постеля)».

ρ_i и ρ'_i по формулам (34), (35); Y_i и Y'_i по формулам (36) для i от 1 до n ; $dY_i = Y'_i - Y_i$,
 $dL(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n dY_i^2}.$

5. Вычисление масштаба c по произвольному направлению в n -мерной нормальной равнопромежуточной азимутальной проекции.

$d\rho_i = \rho'_i - \rho_i$, u — по формулам (37), c — по формуле (19).

6. Вычисление величины линейного элемента $ds(Y)$ по его проекции $dL(Y)$.

$$ds(Y) = \frac{dL(Y)}{c}.$$

7. Вычисление величины линейного элемента $ds(y)$ по формулам Паули и величины $dL(y)$.

y_i и dy_i — по формулам (13) и (14); $ds(y)$ — по формуле (8), принимая $\rho = \rho_1$,

$$dL(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n dy_i^2}.$$

Результаты вычислений. В результате расчетов получено для всех примеров $S_x = S'_x = 1$. Остальные вычисленные величины приведены в табл. 4.

Анализ полученных данных. 1. Выполнение условия $S'_x = S_x = a^2$ подтверждает принадлежность линейного элемента ds поверхности n -мерной сферы с радиусом $a = 1$.

2. Совпадение величин $ds(Y)$ и $ds(x)$ в данных примерах подтверждает корректность предложенной модели n -мерной сферы и применимость формул математической картографии (теории искажений) для расчета искажений длин в проекции такой сферы на « n -мерную плоскость».

3. Совпадение величин $ds(y)$ и $ds(x)$ подтверждает для $n > 2$ корректность интерпретации формулы Паули для римановых нормальных координат y [4] формулой (8).

4. Совпадение величин $ds(y)$ и $ds(Y)$, а также величин $dL(y)$ и $dL(Y)$ подтверждает предположение, что соотношения, описываемые формулами (1)—(8) [4], относящимися к математическому аппарату теории многомерных пространств, для сферы n измерений в пространстве $n + 1$ измерений адекватно выражаются зависимостями из математической картографии.

5. В примере 7 в соответствии с исходными данными получили $c = c_p$.

Отметим в заключение, что в математической литературе имеется ряд работ, в которых исследуются проблемы отображения сферы n измерений (S^n) в евклидово пространство (R^n) методами топологии и комбинаторной геометрии [1, 3, 6]. В данной статье эта задача рассмотрена путем введения сферических координат и их преобразования в прямоугольные координаты методами математической картографии.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] *Бабенко И. К., Богатый С. А.* К отображению сферы в евклидово пространство // Математические заметки. Т. 46. Вып. 3. М.: Наука, 1989. С. 3—8.
- [2] *Каврайский В. В.* Избранные труды. Т. II. Л.: Изд-во УНГС ВИФ, 1958. 320 с.
- [3] *Макеев В. В.* Задача Кнастера о непрерывных отображениях сферы в евклидово пространство // Исследования по топологии 6. Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 167. Л.: Наука, 1988. С. 169—178.
- [4] *Паули В.* Теория относительности. М.: Наука, 1983. 336 с.
- [5] *Сажин М. В.* Современная космология в популярном изложении. М.: Едиториал УРСС, 2002. 240 с.
- [6] *Yang C. T.* On maps from spheres to Euclidean spaces // American Journal of Mathematics. 1957. V. 79. N 4. P. 725—732.

Санкт-Петербург

Поступило в редакцию
1 ноября 2010 г.

Изв. РГО, 2011. Т. 143. Вып. 4

© Г. Ф. УФИМЦЕВ, И. А. ФИЛИНОВ, А. А. ЩЕТНИКОВ

АРИДНЫЕ ЧЕРТЫ В МОРФОГЕНЕЗЕ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ЮГЕ ВОСТОЧНОЙ СИБИРИ

Более столетия эоловые отложения юга Восточной Сибири изучаются с особым вниманием. Одним из первых был В. А. Обручев [15], затем при региональных и специальных геоморфологических исследованиях эоловые пески и созданные ими геоморфологические ландшафты неоднократно обращали на себя внимание [8—11, 16, 17, 19], а в последние годы проведены детальные работы на побережьях Байкала и ряда суходольных впадин Байкальского типа [1—7, 14, 22]. Этот интерес не случаен и имеет явный прикладной аспект: из-за эоловых процессов, например, в XIX в. был покинут г. Селенгинск на правом берегу одноименной реки, впадающей в Байкал. Периодически проявляющиеся в регионе пыльные бури сопровождаются сильными ветрами и приносят значительный материальный ущерб, включая выгорание населенных пунктов и дачных поселков.

Проведенные разными авторами исследования в основном ориентированы на изучение переноса и аккумуляции эоловых песков, а денудационная составляющая процесса остается в тени. К тому же в них отсутствуют аргументированные представления об особенностях проявления эоловых процессов в течение четвертичного времени и особенно эпохи появления и последующего обитания в регионе человеческих сообществ. Работы по изучению лёссовидных образований (а не только эоловых песков) имеют по понятным причинам явный инженерно-геологический уклон [18]. Главный недостаток проведенных ранее исследований заключается в том, что эоловый процесс