

ДИСКУССИИ

© И. О. ШИЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОТИЧНОСТИ
ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В последнее время все большее число исследований обнаруживает сложное поведение в системе океан—атмосфера, сочетающее в себе признаки детерминированной и хаотической динамики [3, 4, 10, 11, 13, 14].

Одним из подходов к исследованию взаимодействий в системе океан—атмосфера является модельное представление ее в виде динамической системы. Выяснение ее свойств открывает возможность детального описания изменчивости процессов, происходящих в океане и оценки возможности их прогнозирования.

Единственным источником информации о динамике происходящих в океане процессах являются порождаемые ими временные ряды, на основе которых возможно построение «портрета» в фазовом пространстве, которое называется *реконструкцией* динамической системы.

Хаотические временные ряды зачастую демонстрируют стремление системы выйти на определенный режим функционирования, который проявляется в виде аттрактора в фазовом пространстве.

Следуя [6], предположим, что $x_1, x_2 \dots x_n$ — скалярные величины, однозначно определяющие состояние динамической системы. Их часто называют переменными состояниями. Они же могут быть выбраны в качестве координат n -мерного *фазового пространства* Θ динамической системы, которое называется пространством состояний.

Изменение состояния динамической системы во времени называется движением. Движению динамической системы отвечает перемещение соответствующей ее состоянию точки фазового пространства, описывающей при этом кривую, именуемую *фазовой траекторией*. Такую точку обычно называют *изображающей*.

Исследование поведения динамической системы сводится к изучению разбиения ее фазового пространства Θ на области, различающиеся характером траекторий, и к выяснению зависимости структуры такого разбиения от значений параметров системы [2].

С геометрической точки зрения под структурой разбиения фазового пространства на траектории понимается геометрическая картина взаиморасположения фазовых траекторий в пространстве Θ . Структура разбиения пространства Θ на фазовые траектории называется *фазовым портретом* рассматриваемой динамической системы.

Исследуемые временные ряды океанологических процессов являются отражением реальной системы, математическая модель которой априорно неизвестна и при этом неизвестна и размерность ее *фазового пространства*.

Для построения фазового портрета динамической системы необходимо решить ряд вопросов. Первый из них — это вычисление размерности *фазового пространства*, или *размерности вложения* m , которая определяет наименьшее число независимых переменных, однозначно описывающих установившееся движение динамической системы.

Второй вопрос связан с определением формы фазового пространства. Для различного рода *диссипативных* динамических систем форма фазового пространства (или облако изображающих точек) имеет достаточно сложный вид — это различного вида *аттракторы*. Простые примеры аттракторов — это точка, характеризующая устойчивое состояние равновесия, и предельный цикл, отвечающий режиму периодических колебаний.

Нелинейные динамические системы, обладающие хаотической динамикой, характеризуются нерегулярным, хаотическим изменением динамических переменных во времени. В фазовом пространстве такая диссипативная система описывается *странным аттрактором* — притягивающим множеством в фазовом пространстве, в котором расположены хаотические траектории.

Основные математические подходы к исследованию свойств аттракторов развиты в теории нелинейных динамических систем и фрактальных множеств [2, 7, 12]. Они представляют широкий набор методов, включая восстановление аттрактора в фазовом пространстве, вычисление экспонент Ляпунова, обобщенных размерностей и энтропий.

Одной из проблем использования методов нелинейной динамики для анализа временных рядов и исследования свойств аттракторов являются требования к длине временных рядов. Так, например, для корректной оценки корреляционной (фрактальной) размерности D_2 требуется длина реализации из M точек. Причем выбор длины реализации M должен удовлетворять условию $M > 10^{D/2}$ или $D_{max} \cong 21 \lg M$ [19, 20]. Процедура оценки показателей Ляпунова требует еще большего объема данных, нежели вычисление корреляционной размерности. Если для адекватной оценки размерности нужно M отсчетов, то для оценки показателей Ляпунова в той же ситуации — порядка M^2 отсчетов [19].

Предварительные оценки корреляционной размерности гидрометеорологических процессов, исследованных в работе [15], лежат в пределах от 2 до 8.

В настоящей работе исследуется процесс колебания уровня моря на различных временных масштабах.

Использованы временные ряды альтиметрических наблюдений, сформированные на основе карт уровня поверхности (на акватории Берингова моря), публикуемых в рамках Международного проекта AVISO [17], уровенные наблюдения на гидрометеорологических постах Международной службы PSMSL [21] и приливные записи уровня моря в порту Lowestoft (52.48° с. ш., 1.75° в. д.) [20]. Характеристики временных рядов приведены в табл. 1.

Выбор означенных временных рядов определялся, во-первых, наличием в исследуемых процессах детерминированной и хаотичной динамики. В приливных записях уровня детерминированная составляющая ярко выражена, определяется действием приливообразующей силы. В среднемесячных значениях уровня на гидрометпостах — это сезонный ход. В альтиметрических наблюдениях за уровнем — это также сезонный ход, который, однако, выражен значительно слабее. Хаотическая составляющая изменчивости уровня имеет разную

Таблица 1
Основные характеристики временных рядов

Временной ряд	Период наблюдений, гг.	Дискретность наблюдений	Длина ряда
Альтиметрический уровень Берингова моря			
53.1° с. ш., 174.66 в. д.	1992—2010	7 сут	900
53.1° с. ш., 189.99 в. д.	1992—2010	То же	900
55.0° с. ш., 164.99 в. д.	1992—2010	» »	900
55.0° с. ш., 166.33 в. д.	1992—2010	» »	900
55.0° с. ш., 170.99 в. д.	1992—2010	» »	900
55.0° с. ш., 187.99 в. д.	1992—2010	» »	900
55.0° с. ш., 188.66 в. д.	1992—2010	» »	900
58.0° с. ш., 164.33 в. д.	1992—2010	» »	900
58.0° с. ш., 182.66 в. д.	1992—2010	» »	900
Приливные записи уровня моря			
Порт Lowestoft	Январь 2005— декабрь 2005	15 мин	32000
Уровень моря на мореографных станциях (сеть PSMSL)			
Уровень моря (Стокгольм)	1889—2009	1 мес	1452
Уровень моря (Дублин)	1938—2001	То же	768

природу и вносит различный вклад в исследуемые процессы. Это предопределяет различные формы траекторий в их фазовом пространстве. Во-вторых, выбор определялся продолжительностью временных рядов согласно требованиям теории нелинейных динамических систем.

Анализ функции спектральной плотности, рассчитанной в стационарном приближении, свидетельствует о полицикличности рассматриваемых процессов (рис. 1). Характерной чертой большинства спектров (альтиметрических наблюдений за уровнем и среднемесячных значений уровня моря в пунктах мировой службы наблюдений PSMSL) является доминирование сезонных колебаний с периодом 12 мес. В высокочастотной области (на масштабах меньше сезонных колебаний) спектры имеют вид, соответствующий «цветному» шуму. Отличительными чертами спектров приливных записей являются доминирование полусуточных приливных колебаний и наличие высокочастотных обертонов.

Следует отметить, что сезонная ритмика, присутствующая практически во всех природных процессах, являет собой пример детерминированного процесса. Однако как амплитуда, так и фаза годовых колебаний существенно меняются в пространстве и во времени. С позиций нелинейных динамических систем *неустойчивость сезонной ритмики* можно рассматривать как проявление хаотичности в детерминированном сигнале, которая порождает особый тип фазового пространства, свойственного таким системам и имеющего вид *странного аттрактора*. Его размерность и свойства определяют сложность нелинейной динамической системы.

Наличие высокочастотных обертонов в спектрах приливных записей уровня моря также можно рассматривать как неустойчивость основного приливного колебания (в нашем случае — полусуточного).

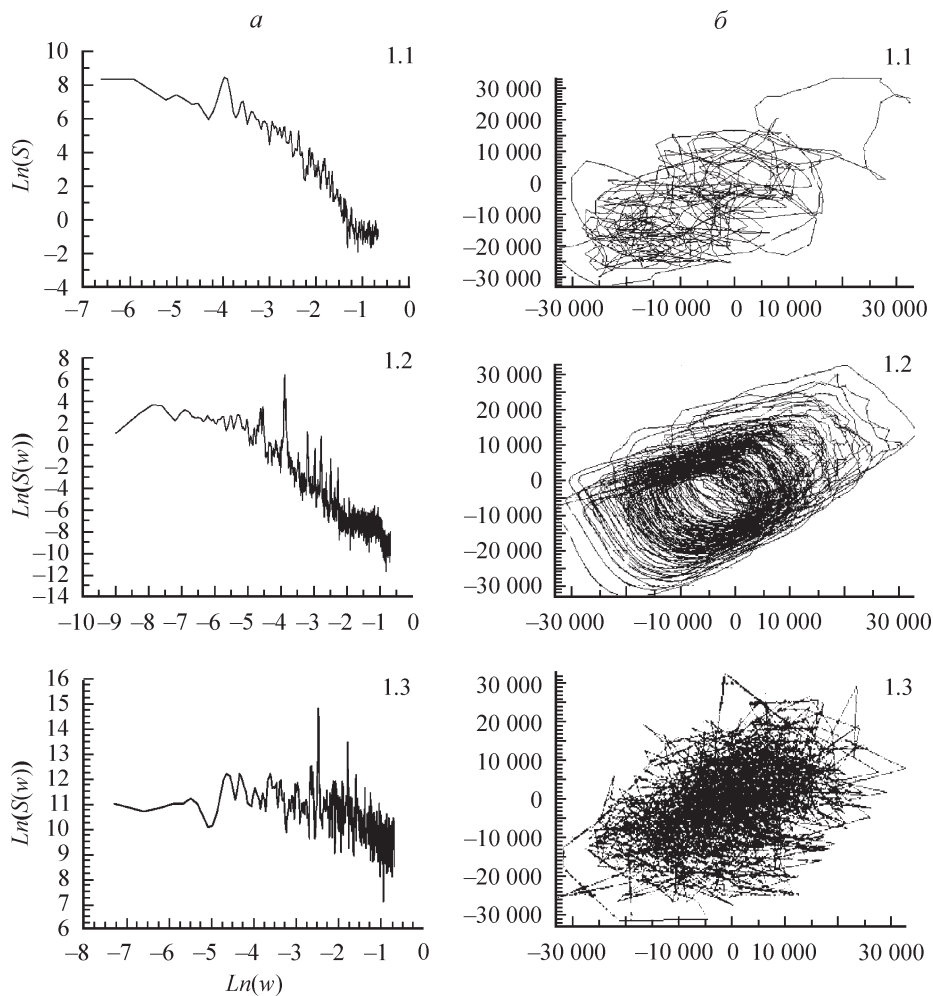


Рис. 1. Функции спектральной плотности (а) и реконструированный псевдоаттрактор (б) исследуемых временных рядов.

1.1 — ряд альтиметрического уровня в точке 53.1° с. ш., 174.66° в. д.; 1.2 — ряд приливной записи уровня моря в порту Lowestoft; 1.3 — ряд наблюдений за уровнем моря (PSMSL) в п. Стокгольм.

Указанные особенности функций спектральной плотности определяют сложный характер фазовых картин исследуемых процессов, сочетающих детерминированную и хаотическую динамику. Будем рассматривать их как реализации *маломодовой нелинейной динамической системы с хаосом*.

Для построения фазовой картины (реконструкции фазовой траектории) исследуемых процессов использовалась процедура вложения, основанная на теореме Такенса о возможности восстановления (реконструкции) фазового портрета аттрактора по временному ряду [22].

При использовании указанной процедуры основными параметрами, необходимыми для корректной реконструкции аттрактора, являются *внедренная размерность m* и *время задержки τ* . Выбор оптимального значения τ осуществлялся на основе исследования свойств корреляционной функции и функции взаимной информации [4, 6, 7].

Таблица 2

Оценки оптимальной временной задержки τ и внедренной размерности m при реконструкции аттрактора

Временной ряд	Оптимальная временная задержка, τ	Внедренная размерность, m	Корреляционная размерность, D_2
Альтиметрический уровень Берингова моря			
53.1° с. ш., 174.66 в. д.	6	9	6.4
53.1° с. ш., 189.99 в. д.	3	9	6.2
55.0° с. ш., 164.99 в. д.	8	10	5.8
55.0° с. ш., 166.33 в. д.	11	8	4.4
55.0° с. ш., 170.99 в. д.	8	5	4.9
55.0° с. ш., 187.99 в. д.	8	6	5.1
55.0° с. ш., 188.66 в. д.	9	7	5.4
58.0° с. ш., 164.33 в. д.	3	12	6.9
58.0° с. ш., 182.66 в. д.	6	16	7.1
Приливные записи уровня моря			
Порт Lowestoft	12	7	5.5
Уровень моря на мореграфических станциях (сеть PSMSL)			
Уровень моря (Стокгольм)	3	12	8.0
Уровень моря (Дублин)	1	14	7.5

Оптимальное время задержки, определенное из анализа графиков корреляционной функции и средней взаимной информации, представлено в табл. 2.

Для оценки внедренной размерности m использовались несколько подходов. Во-первых, метод «ложных соседей». Во-вторых, метод, основанный на вычислении корреляционной размерности D_2 (корреляционного интеграла), [6, 7, 23].

Оценки, полученные методом «ложных соседей», дают характеристику «снизу» размерности лагового пространства, необходимого для корректной реконструкции фазового пространства.

Корреляционная размерность D_2 , вычисляемая на основе корреляционного интеграла (алгоритм Грассбергера—Прокаччия [7]), позволяет получить величину размерности внедренного фазового пространства и оценить сложность реконструированного аттрактора (зачастую имеющего фрактальную размерность [2, 7, 8]), построенного методом задержек. Дробная размерность фазового пространства исследуемой системы означает присутствие хаотической динамики во временных рядах и характеризует сложность аттрактора.

Наличие или отсутствие насыщения корреляционного интеграла при увеличении m рассматривается как критерий различия гипотез: генерируется сигнал динамической системой или является шумовым. Если наблюдается насыщение на некотором уровне D_2 , рассчитанном при различных m , то эту величину принимают в качестве оценки корреляционной размерности, соответствующее значение m считают размерностью вложения (внедренной).

Следует отметить, что не всегда удается оценить график корреляционного интеграла и выявить интервалы линейности для корректной оценки D_2 [6].

Для рассматриваемых временных рядов корреляционный интеграл демонстрировал насыщение при увеличении размерности вложения m , что свиде-

тельствует об их динамической (а не шумовой) природе. Оценки корреляционной размерности и внедренной размерности фазового пространства представлены в табл. 2.

Изменение внедренной размерности в пределах от 5 до 16 подтверждает адекватность гипотезы о возможности описания исследуемых океанологических процессов с позиций нелинейных динамических систем невысокой размерности, а также — возникновение в них хаотической динамики.

На рис. 1 представлены примеры отображения реконструированных аттракторов на плоскость. Вид фазовых траекторий свидетельствует о формировании аттракторов рассматриваемых процессов (конечно, построенные конструкции необходимо называть псевдоаттракторами, но для простоты дальнейшего изложения мы будем называть их аттракторами). Аттракторы процессов имеют различные формы.

Аттракторы процессов, в которых присутствует хорошо выраженная ритмика, характеризуются «плотной упаковкой». Приливная ритмика формирует отчетливый аттрактор, притягивающим множеством которого являются полусуточные колебания. Сезонная ритмика, присутствующая в рядах альтиметрических наблюдений за уровнем и временных рядах мореографных наблюдений на постах службы PSMSL, также формирует аттрактор в фазовом пространстве, однако обладающий большей хаотичностью. Возможно, это связано с высоким уровнем зашумленности сигнала, с одной стороны, и полициклическостью процессов, приводящей к нелинейным взаимодействиям между модами колебаний — с другой.

Следует отметить, что помехи и шумы во временных рядах отражаются на фазовом портрете как размытость траекторий, смещение положения петель, несимметричность формы аттрактора.

Для получения количественных оценок, характеризующих форму реконструированных аттракторов, использовался векторно-алгебраический метод статистического анализа векторных процессов [9].

Для этого применялся лагранжевый подход, который состоит в том, что отображение реконструированного аттрактора на плоскость (рис. 1) представлялось (точнее, движение изображающей точки по фазовой траектории) как последовательность векторов в декартовой системе координат $\vec{v}(t)$. Движение изображающей точки по фазовой траектории (при реконструкции аттрактора) приводит к изменению ее координат (модуля и направления вектора, описывающего ее положение на фазовой траектории), что делает возможным применение векторно-алгебраического метода для выявления особенностей перемещения изображающей точки в фазовом пространстве. Кроме того, предлагаемый подход позволяет описать геометрические характеристики фазовой траектории и исследовать ее устойчивость во времени.

Основными вычисляемыми характеристиками являлись оценки вектора математического ожидания и различных инвариантов тензора его дисперсии, рассчитанные по исходным данным вектора перемещения изображающей точки в фазовом пространстве.

По рядам вектора перемещения изображающей точки в фазовом пространстве (точнее, перемещение в проекции фазовой траектории на плоскость) в рамках векторно-алгебраического метода рассчитывались линейный инвариант тензора дисперсии вектора $I_1(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0)$, где $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ — большая и малая полуоси эллипса дисперсии соответственно, и направление большой оси эллипса дисперсии $\alpha(0)$.

Таблица 3

Инварианты тензора среднеквадратического отклонения перемещения изображающей точки в фазовом пространстве при реконструкции аттрактора

Временной ряд	$\sqrt{I_1}$	$\sqrt{\lambda_1}$	$\sqrt{\lambda_2}$	$\sqrt{\chi}$	α	r_v
Альзиметрический уровень Берингова моря						
53.1° с. ш., 174.66 в. д.	11.25	10.05	5.04	0.502	45.0	2.68
53.1° с. ш., 189.99 в. д.	7.19	6.39	3.29	0.515	45.0	3.60
55.0° с. ш., 164.99 в. д.	8.84	8.08	3.58	0.443	45.0	2.60
55.0° с. ш., 166.33 в. д.	7.75	6.29	3.35	0.492	45.0	1.70
55.0° с. ш., 170.99 в. д.	8.31	7.33	3.95	0.539	45.0	2.24
55.0° с. ш., 187.99 в. д.	11.63	10.3	5.33	0.515	45.0	3.40
55.0° с. ш., 188.66 в. д.	10.99	9.58	5.39	0.563	45.0	2.95
58.0° с. ш., 164.33 в. д.	6.71	5.55	3.77	0.68	45.0	3.07
58.0° с. ш., 182.66 в. д.	11.93	10.28	6.06	0.589	45.0	7.09
Приливные записи уровня моря						
Порт Lowestoft	0.88	0.71	0.52	0.727	45.0	0.39
Уровень моря на мореографных станциях (сеть PSMSL)						
Уровень моря (Стокгольм)	133.02	114.38	72.72	0.653	45.0	0.01
Уровень моря (Дублин)	291.17	244.92	157.48	0.643	45.0	0.03

Дополнительно получена оценка показателя устойчивости вектора r_v . Он рассчитывался по формуле $r = \sqrt{I_1(0)/|m_v|}$, где $I_1(0)$ — линейный инвариант тензора дисперсии вектора, $|m_v|$ — модуль вектора его математического ожидания [9].

В табл. 3 представлены результаты расчетов инвариантов тензора среднеквадратического отклонения движения изображающей точки в фазовом пространстве, где $\sqrt{I_1}$ — линейный инвариант, $\sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_2}$ — большая и малая полуоси эллипса изменчивости, $\sqrt{\chi}$ — отношение малой полуоси к большой полуоси эллипса изменчивости, α — ориентация большой полуоси, r_v — устойчивость вектора среднеквадратического отклонения.

Оценки величин, представленных в табл. 3, свидетельствуют о существенной изменчивости параметров реконструированных аттракторов. Линейный инвариант $\sqrt{I_1}$, характеризующий интенсивность изменчивости аттрактора, меняется в широких пределах. Абсолютная величина зависит, с одной стороны, от характера процесса (от размаха изменчивости измеренных величин), с другой — можно видеть существенную изменчивость $\sqrt{I_1}$ по акватории (например, при рассмотрении альзиметрических наблюдений за уровнем в пределах акватории Берингова моря). Эксцентриситет изменчивости $\sqrt{\chi}$ свидетельствует, что в большинстве случаев вектор изменчивости описывает форму эллипса. Однако его устойчивость (r_v) существенно изменяется.

Картирование величин $\sqrt{I_1}$, $\sqrt{\chi}$, r_v позволит выявить особенности хаотической динамики на исследуемых акваториях.

Расчет линейных инвариантов спектральной тензор-функции $I_2(w)$, таких как $\lambda_1(w)$, $\lambda_2(w)$ — большая и малая полуоси эллипса изменчивости; $D(w)$ — индикатор вращения; $\alpha(w)$ — направление большой оси эллипса дисперсии тен-

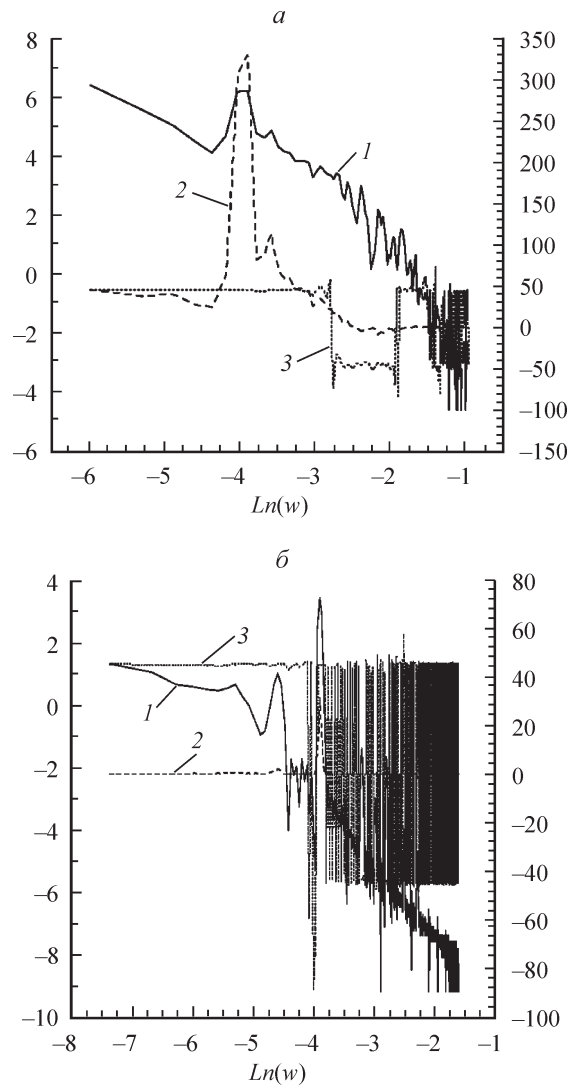


Рис. 2. Линейный инвариант спектральной тензор-функции $I_2(w)$ ($Ln(I_2)$) — на графике, индикатора вращения $D(w)$ и ориентация большой полуоси эллипса дисперсии $a(w)$ (Q — на графике) изменения вектора движения изображающей точки в фазовом пространстве при реконструкции аттрактора.

a — для реконструированного аттрактора изменчивости альтиметрического уровня Берингова моря в точке с координатами (53.1° с. ш., 174.66° в. д.); b — для реконструированного аттрактора приливных колебаний в порту Lowestoft.

1 — $Ln(I_2)$ (L), 2 — $D(R)$, 3 — $Q(R)$.

зор-функции $I_1(w)$ и $r_{\vec{v}}(w)$ — показатель устойчивости вектора, вычисленных на частоте w , позволяет исследовать особенности формирования аттрактора.

На рис. 2 представлен пример расчета линейного инварианта спектральной тензор-функции $I_2(w)$, индикатора вращения $D(w)$ и ориентации большой полуоси эллипса дисперсии $a(w)$.

Графики линейных инвариантов спектральной тензор функции $I_2(w)$ демонстрируют наличие цикличности при движении изображающей точки по фазо-

вым траекториям аттракторов. Периоды основных циклов (максимумы на графике $I_2(w)$) соответствуют временным масштабам изменчивости, выделенным на основе функций спектральной плотности исследуемых процессов, подтверждая достоверность присутствия периодичностей, в частности сезонной ритмики в колебании альтиметрического уровня Берингова моря и преобладание полусуточной приливной ритмики в порту Lowestoft.

Наличие выраженного максимума на графике индикатора вращения $D(w)$ изображающей точки на частотах, соответствующих сезонным колебаниям, в случае временных рядов альтиметрического уровня Берингова моря и приливных колебаний уровня в порту Lowestoft может свидетельствовать о формировании аттрактора, характеризующего данные процессы. Наличие устойчивого перемещения изображающей точки в фазовом пространстве с указанными временными масштабами позволяет говорить о наличии предельного цикла.

Полицикличность рассматриваемых процессов приводит к формированию более сложного, чем предельный цикл, — хаотическому аттрактору. Это связано с особенностями движения изображающей точки в фазовом пространстве, собственно с наличием цикличностей и особенностями их проявления в фазовом пространстве. Каждый из циклов характеризуется эллипсом изменчивости с определенными параметрами и его положением в фазовом пространстве. Устойчивость ориентации эллипса изменчивости свидетельствует об однонаправленности вклада процессов различных временных масштабов при формировании аттрактора. Показателем устойчивости может служить ориентация большой полуоси эллипса дисперсии $\alpha(w)$. График на рис. 2 демонстрирует устойчивость ориентации эллипса изменчивости перемещения изображающей точки в фазовом пространстве на основных выделенных циклах в низкочастотной области спектральных инвариантов. В высокочастотной области линейных инвариантов наблюдается неустойчивость ориентации положения большой полуоси эллипса изменчивости. Можно полагать, что частая смена ориентации эллипса изменчивости в фазовом пространстве является причиной существенного усложнения формы аттрактора. Высокочастотная область «ответственна» за «хаотизацию» аттрактора. Важным параметром является частота, на которой происходит смена режима формирования аттрактора. Указанная величина различна для исследуемых процессов (рис. 2).

Анализ линейных инвариантов вектора перемещения изображающей точки в фазовом пространстве свидетельствует о том, что рассматриваемые процессы формируют *хаотические аттракторы*.

Детально свойства хаотических аттракторов возможно оценить, используя такие инвариантные характеристики, как корреляционная энтропия и показатели (экспоненты) Ляпунова. Для численной оценки меры хаотичности временных рядов проведен расчет корреляционной энтропии (или энтропии Колмогорова—Синяя) и экспонент Ляпунова [6].

Оценка энтропии Колмогорова—Синяя характеризует среднюю скорость потери информации временным рядом при увеличении размерности фазового пространства и является количественной характеристикой степени хаотичности ряда. Если энтропия достигает нуля, то система становится полностью предсказуемой. Так будет в случае регулярных динамических процессов. Для случайных процессов энтропия неограниченно велика. Энтропия системы в режиме странного аттрактора положительна, но имеет конечное значение.

Расчет корреляционной энтропии показал, что с ростом размерности фазового пространства m значения корреляционной энтропии для всех временных

Таблица 4

**Оценки экспонент Ляпунова, размерности Каплана—Йорке
и корреляционной энтропии**

Временной ряд	Размерность, m	Экспоненты Ляпунова				Старш. показатель Ляпунова (LLE)	Сумма экспонент Ляпунова	Размерность Каплана—Йорке	Корреляционная энтропия
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4				
Альтиметрический уровень Берингова моря									
53.1° с. ш., 174.66 в. д.	4	0.615	0.166	-0.192	-0.815	0.607	-0.226	3.72	2.888
53.1° с. ш., 189.99 в. д.	3	0.416	-0.056	-0.728	—	0.419	-0.369	2.49	2.409
55.0° с. ш., 164.99 в. д.	4	0.619	0.211	-0.140	-0.758	0.642	-0.067	3.91	2.728
55.0° с. ш., 166.33 в. д.	4	0.669	0.181	-0.113	-0.752	0.659	-0.113	3.97	2.596
55.0° с. ш., 170.99 в. д.	4	0.586	0.212	-0.143	-0.834	0.587	-0.178	3.78	2.929
55.0° с. ш., 187.99 в. д.	4	0.600	0.194	-0.133	-0.821	0.604	-0.160	3.81	3.230
55.0° с. ш., 188.66 в. д.	4	0.601	0.209	-0.104	-0.785	0.615	-0.079	3.89	3.674
58.0° с. ш., 164.33 в. д.	3	0.423	-0.031	-0.815	—	0.418	-0.424	2.48	1.736
58.0° с. ш., 182.66 в. д.	4	0.543	0.241	-0.147	-0.827	0.552	-0.190	3.77	3.836
Приливные записи уровня моря									
Порт Lowestoft	4	0.500	0.168	-0.148	-0.689	0.3425	-0.168	3.76	5.133
Уровень моря на мореографных станциях (сеть PSMSL)									
Уровень моря (Стокгольм)	3	0.443	0.013	-0.617	—	0.455	-0.161	2.73	5.739
Уровень моря (Дублин)	3	0.413	-0.021	-0.617	—	0.681	-0.225	2.63	3.155

рядов монотонно снижаются и стремятся к предельным значениям, которые характеризуют степень хаотичности. Полученные оценки, представленные в табл. 4, свидетельствуют, что временные ряды находятся в режиме странного аттрактора, а присутствующий во временных рядах хаос является слабодетерминированным.

Как известно, одной из особенностей хаотических временных рядов является неустойчивость траекторий, принадлежащих хаотическому аттрактору. Экспоненты Ляпунова являются количественной мерой неустойчивости и позволяют получить оценки фрактальной размерности аттрактора, энтропии системы, характерное время предсказуемости поведения системы [6], тем самым они являются показателями наличия хаотичности в исследуемых временных рядах. Они характеризуют траекторию с точки зрения поведения соседних траекторий, располагающихся в ее окрестности, и являются мерой того, как быстро расходятся траектории очень близких точек в фазовом пространстве.

Для каждой фазовой траектории на аттракторе имеется свой (определенный) набор (спектр) показателей Ляпунова [6]. Присутствие в этом спектре показателя λ означает, что существует такое возмущение исходной траектории, которое эволюционирует во времени, как $\exp(\lambda t)$. Следовательно, наличие в спектре хотя бы одного положительного показателя означает неустойчивость рассматриваемой фазовой траектории и тем самым наличие хаотической динамики.

С помощью одномерной экспериментально полученной записи реализации процесса возможно вычислить экспоненты Ляпунова, используя различные

процедуры [6, 24, 25]. В настоящей работе для оценки показателей Ляпунова использовалась процедура, предложенная в [24] и реализованная в рамках программного комплекса по исследованию нелинейных динамических систем *TISEAN* [23].

Эффективность исследования свойств реконструированных аттракторов на основе рассчитанных экспонент Ляпунова определяется возможностью получения оценок размерности хаотического аттрактора, который проявляет фрактальные свойства. Такой величиной является размерность Каплана—Йорке, вычисляемая на основе экспонент Ляпунова [6].

В табл. 4 приведены результаты расчета экспонент Ляпунова и размерности Каплана—Йорке. Положительные значения старшей экспоненты Ляпунова (λ_1) свидетельствуют о наличии хаотичности во всех исследуемых рядах. Величина размерности Каплана—Йорке подтверждает фрактальность фазового пространства.

В большинстве случаев временные ряды уровней наблюдений (как альтиметрических, так и полученные на береговых станциях) демонстрируют гиперхаотичность. Об этом свидетельствуют положительные значения второй экспоненты Ляпунова.

Обобщая полученные результаты следует отметить, что исследованные океанологические процессы изменчивости уровня моря в большинстве случаев являют пример маломодовой хаотичной динамики. Являясь результатом нелинейных взаимодействий в системе океан—атмосфера, они порождают сложные формы фазовых портретов.

Использование векторно-алгебраического статистического подхода к выявлению особенностей перемещения изображающей точки по фазовым траекториям в совокупности с оценками экспонент Ляпунова и фрактальных размерностей позволяет дать более полную характеристику реконструированных аттракторов океанологических процессов, сочетающих детерминированную и хаотичную динамику.

Список литературы

- [1] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов, 1999.
- [2] Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.
- [3] Дымников В. П., Лыкосов В. Н. Проблемы моделирования климата и его изменений. М.: Институт вычислительной математики РАН, 2003.
- [4] Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. М.: Наука, 1994.
- [5] Кошель К. В., Пранц С. В. Хаотическая адвекция в океане // Успехи физических наук. 2006. Т. 176. № 11. С. 1177—1206.
- [6] Кузнецов С. П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во физ.-мат. литературы. 2001. 296 с.
- [7] Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Изд. УРСС, 2000. 250 с.
- [8] Мартынов Б. А., Бочков В. В. Введение в стохастическую динамику: Учебн. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. 92 с.
- [9] Методическое письмо по вероятностному анализу векторных временных рядов скоростей течений и ветра / Под ред. В. А. Рожкова. Л.: Гидрометиздат, 1984. 61 с.
- [10] Старченко И. Б. Динамический хаос в гидроакустике. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 296 с.

- [11] Сеидов Д. Г. Синергетика Океанских процессов. Л.: Гидрометиздат, 1989. 287 с.
- [12] Тарасевич Ю. Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Дифференциальные модели. Стохастические и детерминистические модели. М.: Изд-во УРПС, 2001.
- [13] Фрик П. Г. Турбулентность: Подходы и модели. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 293 с.
- [14] Шилов И. О. Фрактальный анализ временных рядов альтиметрических наблюдений за уровнем океана // Изв. РГО. 2010. Т. 142. Вып. 6. С. 59—69.
- [15] Шилов И. О. Аттракторный подход к изучению пространственно-временной изменчивости гидрометеорологических процессов и полей // Изв. РГО. Т. 143. 2011. Вып. 1. С. 49—67.
- [16] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
- [17] AVISO/Altimetry, <http://www.aviso.oceanobs.com>
- [18] Eckman J.-P., Kamphorst Oliffson S., Ruelle D., Ciliberto S. Lyapunov exponents from a time series // Phys. Rev. 1986. A 34, P. 27—32.
- [19] Eckman J.-P., Ruelle D. Ergodic theory of chaotic and strange attractors // Rev. Mod. Phys. 1985. N 57(3). P. 617—656.
- [20] Proudman Oceanographic Laboratory, BODS, <http://www.bodc.ac.uk>
- [21] Permanent Service for Mean Sea Level (PSMSL), <http://www.psmsl.org>
- [22] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence / In Dynamical Systems and Turbulence, edited by D. A. Rand and L.-S. Young. Berlin: Springer, 1981. P. 366—381.
- [23] Hegger R., Kantz H., Schreiber T. Practical implementation of nonlinear time series method: The TISEAN package // CHAOS. 1999. N 9. P. 4—13.
- [24] Rosenstein M. T., Collins J. J., Luca C. J. D. A practical method for calculating largest Lyapunov exponent from small data sets // Physica. 1993. D 65. P. 117—134.
- [25] Schreiber T. Interdisciplinary application of nonlinear time series methods // Phys. Report. 1999. N 308. P. 1.

Санкт-Петербург
geo-igor@mail.ru

Поступило в редакцию
8 ноября 2011 г.

От редакции

В статье основное внимание уделено детерминированному подходу к описанию океанологических процессов и полей в терминах динамики нелинейных систем и фрактальной геометрии. Этот подход успешно использован Лоренцем для описания динамики климата и построения модели конвекции, в океанологии он пока еще не завоевал всеобщего признания.

Альтернативным является вероятностный подход. На примере табл. 1 временных рядов колебаний уровня в 9 точках Берингова моря по спутниковым данным и в 3 точках по данным прибрежных мареографных измерений обозначим (не указанные в статье) преимущества и простоту вероятностного подхода. Вероятностной моделью анализа исходных данных и синтеза результатов является модель (ПКСП) — периодически, или (ППКСП) — полипериодически, коррелированного случайного процесса (поля).

Математическое ожидание, дисперсия, ковариационная функция и спектральная плотность являются периодическими функциями. Первая характеризует детерминированный компонент (аналог псевдоаттрактора), остальные — стохастический компонент. Для уровня Берингова моря эти вероятностные характеристики зависят и от пространственного аргумента, модель годового хода имеет период коррелированности год, модель приливного анализа базируется на теории почти периодических функций.