

- [48] Ray N., Adams J. M. A GIS-based Vegetation Map of the World at the Last Glacial Maximum (25.000—15.000 BP). Internet Archaeology. 2001. 11. URL: http://intarch.ac.uk/journal/issue11/rayadams_toc.html
- [49] Rodrigues D., Abell P. I., Kropelin S. Seasonality in the early Holocene climate of Northwest Sudan: interpretation of *Etheria elliptica* shell isotopic data // Global and Planetary Change. 2000, N 26. P. 181—187.
- [50] The Human past. World Prehistory and the Development of Human Societies. L.: Thames and Hudson, 2005. 182 p.
- [51] Trauth M. H., Deino A. L., Bergner A. G. N., Strecker M. R. East African climate change and orbital forcing during the last 175 kyr BP / Earth and Planetary Letters. 2003, N 206. P. 279—313.
- [52] Uriarte A. History of Earth's Climate. San Sebastian: Gobierno de Vasco, 2011. 314 p.

Санкт-Петербург
 mamosov@mail.ru
 Санкт-Петербургский
 государственный университет

Поступило в редакцию
 26 февраля 2013 г.

Изв. РГО. 2013. Т. 145. Вып. 4

© Ю. П. КЛЕВАНЦОВ,* В. А. РОЖКОВ,** К. Г. СМЕРНОВ,**
 Н. А. СУХИХ**

ВЕРТИКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЙ В ФИНСКОМ ЗАЛИВЕ

За последние годы в районе мыса Шепелевский в Финском заливе Балтийского моря доплеровским профилографом течений ADCP 300 кГц выполнена серия синхронных измерений трехкомпонентного вектора $\vec{U}(z, t)$ скорости течений. Для анализа выбраны 10 реализаций с интервалом дискретности $\delta t = 1$ мин на 11 горизонтах (z) в точке $59^\circ 58'$ с. ш., $29^\circ 05'$ в. д. с глубиной 20 м в 2010—2012 гг.

В настоящей работе обсуждаются вопросы описания эпюры скорости течений на серии горизонтов при различных гидрометеорологических ситуациях.

Исходные данные и их характеристика. В табл. 1 для всех реализаций приведены статистические характеристики векторов на трех горизонтах (близ поверхности, у дна и на глубине 6—8 м).

Эти реализации отличаются диапазонами изменений скорости ветра, высот ветровых волн, температурой воды и воздуха, флуктуациями атмосферного давления, наличием штормовых нагонов, ледяного покрова и других гидрометеорологических условий.

Из представленных 10 реализаций по ледовым условиям можно выделить: № 7 — в последнюю неделю которой устанавливался лед, № 8 — когда лед был все время, и № 9, когда были зафиксированы прохождения ледовых полей.

Таблица 1
Статистические характеристики векторов $\vec{U}(t)$ и $\vec{V}(t)$ на трех горизонтах

№ серии	Горизонт	N° мин N' ч	Средние			СКО, см/с					
			U см/с	φ°	w, см/с	Общее при Δt = 1 мин		Общее при Δt = 1 ч		Внутричасовое при Δt = 1 мин	
						I ₁ ^(ψ)	I ₁ ^(φ)	I ₁ ^(ψ)	I ₁ ^(φ)	I ₁ ^(ψ)	I ₁ ^(φ)
1	Приповерхностный Средний Придонный	79461 1470	19.5	29	2.5	56.8	56.9	55.1	55.2	13.9	14.2
			0.4	132	-0.1	10.6	10.7	9.9	10.0	3.9	4.0
			3.0	76	-0.4	9.5	9.7	8.6	8.8	3.9	4.0
2	Приповерхностный Средний Придонный	46332 858	1.9	42	-1.3	19.0	19.5	14.5	14.8	12.7	13.9
			2.2	91	1.8	20.2	20.7	15.5	16.0	22.2	22.7
			0.9	80	-0.2	3.2	3.3	1.8	2.1	2.7	2.7
3	Приповерхностный Средний Придонный	46331 858	3.5	350	1.0	36.8	37.1	35.3	35.6	10.4	10.5
			1.1	118	-0.1	7.2	7.3	6.3	6.3	3.6	3.6
			1.8	93	-0.3	4.0	4.0	3.0	3.1	2.6	2.6
4	Приповерхностный Средний Придонный	32646 605	2.0	319	0.9	43.5	43.9	42.0	42.4	11.5	11.7
			4.1	89	0.0	7.8	7.9	7.3	7.3	3.0	3.1
			1.8	93	-0.2	4.9	4.9	4.1	4.1	2.7	2.9
5	Приповерхностный Средний Придонный	82794 1534	5.6	335	-0.4	55.9	56.1	54.2	54.4	13.7	13.9
			2.9	101	0.0	8.8	8.8	8.1	8.1	3.4	3.5
			0.9	89	-0.3	4.5	4.5	3.6	3.6	2.7	2.8
6	Приповерхностный Средний Придонный	42814 793	7.9	93	1.9	42.2	42.7	38.3	38.6	18.1	18.3
			2.3	222	-0.1	11.7	11.8	11.2	11.2	3.5	3.6
			5.0	57	-0.3	7.8	7.9	7.3	7.3	2.9	3.0
7	Приповерхностный Средний Придонный	39924 740	16.1	348	3.4	35.4	35.7	31.6	31.8	16.0	16.4
			2.8	67	-0.1	12.4	12.4	11.8	11.8	3.7	3.8
			4.8	65	-0.3	9.2	9.2	8.7	8.7	3.1	3.2

Таблица 1 (продолжение)

№* серии	Горизонт	N° мин N' ч	Средние			СКО, см/с			
			U см/с	φ°	w, см/с	Общее при Δt = 1 мин		Общее при Δt = 1 ч	Внутричасовое при Δt = 1 мин
						I _л ^(φ)	I _л ^(ψ)		
8	Приповерхностный Средний Придонный	58878 1090	6.7	226	3.1	23.4	23.6	17.6	16.7
			1.7	66	-0.1	7.3	7.4	6.6	3.6
			0.8	78	-0.2	3.5	3.6	2.2	2.8
9	Приповерхностный Средний Придонный	58878 1090	3.0	35	1.8	50.8	51.0	49.9	13.1
			1.5	91	0.1	9.5	9.5	9.1	2.9
			1.7	83	-0.2	4.6	4.7	3.8	2.7
10	Приповерхностный Средний Придонный	58878 1090	11.2	113	1.0	55.8	56.0	54.3	13.1
			2.8	85	0.1	11.3	11.4	10.9	3.2
			1.6	92	-0.3	5.1	5.2	4.4	2.7

Примечание. * Время регистрации скорости течений в сериях наблюдений: 1) 15.09—16.11.2010 г., 2) 14.03—19.04.2011 г., 3) 19.04—25.05.2011 г., 4) 30.05—26.06.2011 г., 5) 1.07—5.09.2011 г., 6) 19.10—21.11.2011 г., 7) 22.12.2011—24.01.2012 г., 8) 12.02—30.03.2012 г., 9) 30.03—14.05.2012 г., 10) 14.05—29.06.2012 г.

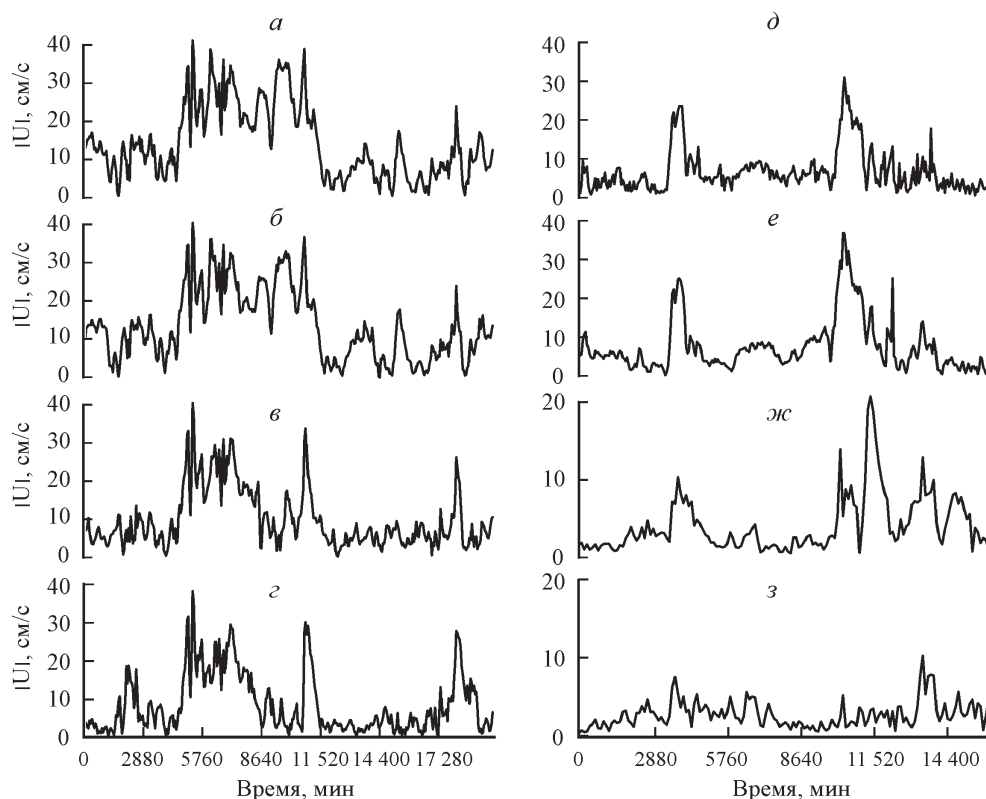


Рис. 1. Временные ряды модуля скорости течения на горизонтах 2, 3, 7, 11 (на оси ОХ время указано в минутах) для реализации № 7 (а—г) и реализации № 8 (д—з).

По скорости ветра выделяются реализации: № 4 — когда ветер был менее 5 м/с, № 1 — с большим количеством случаев увеличения скорости ветра до 10 м/с и выше; № 7 и 10 — с зафиксированной скоростью ветра более 18—20 м/с.

По атмосферному давлению можно выделить: № 4 — реализацию с незначительными изменениями атмосферного давления, № 7 — с быстрой сменой глубоких циклонов, № 8 — с частыми колебаниями атмосферного давления.

В качестве примера на рис. 1 приведены графики среднечасовых значений $\bar{U}(t)$ для реализаций № 7 и 8. Характерной особенностью этих графиков является наличие мезомасштабных «выбросов» вверх и вниз от медианы реализаций, характер которых изменяется с глубиной. Реализация № 7 приходится на период продолжительных штормов (модуль скорости ветра более 20 м/с), а реализация № 8 характеризует течения, когда район постановки автономной донной станции был полностью закрыт льдом. Видно, что в подледном слое течения несколько слабее, чем на нижележащем горизонте.

Для реализации № 6 аналогичный рисунок дан в работе [9].

Вектор математического ожидания и тензор дисперсии. Вектор $\bar{m}_{\bar{U}}$ имеет проекции (m_u, m_v, m_w) , которые интерпретируются как математическое ожидание проекций (u, v, w) вектора $\bar{U}(t)$ на оси декартовой системы координат. При переходе к полярной системе координат модуль вектора вычисляет-

Таблица 2

Собственные числа тензора дисперсий λ_i (см²/с²), инвариант $\sqrt{I_1}$ (см/с) тензора СКО, коэффициент изменчивости r

№ горизонта	По ежеминутным данным			По среднечасовым данным				
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	λ_2	λ_3	$\sqrt{I_1}$	r
1	1350.69	453.84	14.88	1125.69	363.86	2.42	38.63	4.77
2	224.31	60.54	3.34	184.02	25.06	0.26	14.47	3.44
3	172.56	21.04	0.84	162.02	11.84	0.07	13.19	3.77
4	146.40	15.29	0.60	139.60	8.64	0.05	12.18	3.93
5	124.14	13.27	0.55	118.03	7.33	0.04	11.20	4.87
6	106.68	13.44	0.53	101.08	8.07	0.03	10.45	7.46
7	89.08	13.66	0.50	83.76	8.66	0.03	9.62	32.05
8	72.08	13.40	0.48	67.21	8.74	0.03	8.72	6.71
9	59.30	13.66	0.47	54.79	9.28	0.03	8.01	2.86
10	51.26	13.10	0.46	46.94	8.99	0.02	7.48	1.82
11	48.42	13.00	0.45	44.25	8.85	0.03	7.29	1.46

ся по этим проекциям по формуле $|\vec{m}_{\vec{U}}| = \sqrt{m_u^2 + m_v^2 + m_w^2}$, а модуль вектора математического ожидания горизонтальной составляющей скорости $\vec{V}(t)$ — по формуле $|\vec{m}_{\vec{V}}| = \sqrt{m_u^2 + m_v^2}$.

Тензор дисперсии определяется в виде тензорного произведения

$$D_{\vec{U}} = M\{\vec{U}^0 \otimes \vec{U}^0\} = \begin{pmatrix} D_{uu} & D_{uv} & D_{uw} \\ D_{vu} & D_{vv} & D_{vw} \\ D_{wu} & D_{wv} & D_{ww} \end{pmatrix},$$

где $\vec{U}^0 = \vec{U} - \vec{m}_{\vec{U}}$, по диагонали — дисперсии компонентов, вне диагонали — ковариации. Очевидно, что тензор $D_{\vec{U}}$ — симметричный, ему соответствует поверхность второго порядка — эллипсоид с осями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ [1, 3, 7].

Сопоставление сделано в терминах:

— модуля вектора $\vec{m}_{\vec{U}}$, $\vec{m}_{\vec{V}}$, направления ϕ плоского вектора $\vec{V}(z, t)$, отклонения вектора $\vec{m}_{\vec{U}}$ по вертикали от горизонтального направления ϕ ,
— среднеквадратических отклонений (СКО) векторов $\vec{U}$ и $\vec{V}$ по реализациям:

— а) с минутной дискретностью,
— б) с часовой дискретностью при осреднении за час и СКО внутрисуточной изменчивости векторов скорости при центрировании исходных реализаций на среднечасовые значения.

За индикатор СКО выбран квадратный корень линейного инварианта (сумма диагональных элементов) тензора дисперсии.

Из табл.1 видно, что: 1) среднечасовое осреднение значений позволяет выделить на реализациях мезо- и мелкомасштабную изменчивость, различающиеся по СКО; 2) вертикальная структура течений существенно зависит от внешних условий.

В табл. 2 приведены собственные числа тензора дисперсии скорости течений на разных горизонтах для реализации № 6 из табл. 1.

Из табл. 2 следует, что дисперсия вектора убывает с глубиной. Используя понятие коэффициента изменчивости вектора $r = \sqrt{I_1} / |\vec{m}_U|$, легко показать, что коэффициент больше 1 на всех горизонтах.

Аналитическое представление эпюры скорости течений. Рассмотрим представления вертикального профиля скорости $\vec{U}(z, t)$ в виде

$$\sum_s \vec{a}_s(t) \varphi_s(z), \quad (1)$$

$$\vec{U}(z, t) = \sum_s [(a_s^u(t) \varphi_s^u(z)) \vec{i} + (a_s^v(t) \varphi_s^v(z)) \vec{j} + (a_s^w(t) \varphi_s^w(z)) \vec{k}], \quad (2)$$

$$\sum_s a_s(t) \vec{\varphi}_s(z), \quad (3)$$

где $\varphi_k(z)$, $\vec{\varphi}_k(z)$ — ортогональный базис, $\{a_k\}(t)$, $\vec{a}_k(t)$ — коэффициенты, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные орты.

Разложение вертикального профиля $\vec{U}(z, t)$ по системе $\varphi_k(z)$ полиномов П. Л. Чебышева, ортогональных на конечной системе точек. Полиномы $\varphi_k(z)$ в (1) вычисляются по рекуррентным формулам [4]

$$\varphi_0(z) \equiv 1, \quad \varphi_1(z) = z - \frac{m+1}{2},$$

$$\varphi_{k+1}(z) = \varphi_1 \varphi_k - \frac{k^2(m^2 + k^2)}{4(4k^2 - 1)} \varphi_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (4)$$

Из (4) видно, что базисные функции $\varphi_k(z)$ при разных k являются алгебраическими полиномами различных порядков (прямая линия, квадратичная, кубическая параболы и т. д.). Коэффициенты a_k в (1) определяются через скалярное произведение $(\zeta(z), \varphi_k(z))$ функций, где под ζ понимается любая из проекций вектора $\vec{U}$; для полиномов (4)

$$a_k = \frac{\sum_{j=1}^m \zeta(z_j) \varphi_k(z_j)}{\sum_{j=1}^m \varphi_k^2(z_j)}. \quad (5)$$

Обозначим сумму первых s членов через

$$\zeta_s(z) = \sum_{k=0}^s a_k \varphi_k(z), \quad (6)$$

сумму квадратов отклонений (6) от $\zeta(z)$ через

$$\delta_s^2 = \sum_{j=1}^m [\zeta(z_j) - \zeta_s(z_j)]^2. \quad (7)$$

Учитывая ортогональность полиномов (4), формула (7) приводится к виду

$$\delta_s^2 = \sum \zeta^2(z_j) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^s a_k^2 \varphi_k^2(z_j). \quad (8)$$

Поскольку в (4) аргумент z натуральное число от 0 до m , то знаменатель в (5) может быть большим числом, а коэффициент a_k уменьшается по модулю с ростом k . Для сравнения разложения (1) с другими базисными функциями целесообразно и в (1) перейти к ортонормированной системе базисных функций [10]

$$\hat{\phi}_k(z) = \frac{\phi_k(z)}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \phi_k^2(z_j)}}, \quad (9)$$

обладающей свойством как ортогональности, так и нормированности $\sum_{j=1}^m \hat{\phi}_k^2(z_j) = 1$. Последовательность значений δ_s^2 характеризует скорость сходимости ряда (1).

В табл. 3 приведены квантили распределения δ_s^2 в зависимости от количества членов разложения (1).

Из табл. 3 можно сделать вывод, что индивидуальные эпюры среднечасовых значений скорости течений аппроксимируются отрезком из 5 членов ряда (6) с различной точностью, для горизонтальных составляющих: 50 % эпюр 2—3 см/с, 75 % эпюр 4—5 см/с; для вертикальной составляющей: 50 % эпюр — 0.7 см/с, 75 % эпюр — 1 см/с.

Ортогональный алгебраический базис (4), использованный для представления (1) вертикального профиля скорости течений, как показано в работе [4], приводит к зависимости между проекциями вектора $\vec{a}_k(t)$.

Таблица 3

Квантили распределения δ_s^2 (u, v, w для 793 профилей на 11 горизонтах) (см²/с²) по z в зависимости от количества членов разложения

	Квантили	$s = 1$	$s = 3$	$s = 5$	$s = 7$
u	$X_{\min}$	0.4	0.2	0.1	0.0
	$X_{0.75}$	59.0	11.7	2.3	0.3
	$X_{0.5}$	150.2	28.8	5.5	0.7
	$X_{0.25}$	483.2	124.1	15.9	1.7
	$X_{\max}$	2483.4	724.7	96.6	12.3
v	$X_{\min}$	0.8	0.3	0.0	0.0
	$X_{0.75}$	81.9	15.6	2.2	0.3
	$X_{0.5}$	311.3	49.7	8.4	1.0
	$X_{0.25}$	824.7	164.0	26.7	2.4
	$X_{\max}$	4563.6	1295.6	155.4	13.4
w	$X_{\min}$	0.0	0.0	0.0	0.0
	$X_{0.75}$	4.1	0.9	0.1	0.0
	$X_{0.5}$	17.2	4.1	0.4	0.0
	$X_{0.25}$	32.2	7.5	0.9	0.1
	$X_{\max}$	72.6	25.5	4.8	0.5

Таблица 4

Средние значения $\vec{m}_{\vec{a}_k}$, дисперсии $D_{\vec{a}_k}$ (по диагонали) и ковариации проекций вектора $\vec{a}_k$ (над диагональю) и их коэффициенты корреляции (под диагональю)

k	$\vec{m}_{\vec{a}_k} = \begin{pmatrix} m_u \\ m_v \\ m_w \end{pmatrix}$	$D_{\vec{a}_k}$			λ_1	λ_2	λ_3	I_1
0	4.06	844.3	335.7	21.2	992.51	80.90	2.10	1075.51
	-1.67	335.7	228.2	14.3				
	0.56	21.2	14.3	3.0				
1	1.14	404.1	-80.2	29.4	429.76	142.73	1.91	574.40
	5.71	-80.2	163.5	14.1				
	-1.54	29.4	14.1	6.8				
2	8.10	229.0	-94.1	12.2	295.35	99.91	2.84	398.10
	2.20	-94.1	161.9	16.0				
	1.10	12.2	16.0	7.2				
3	-4.81	175.5	-65.7	7.8	215.72	71.32	2.26	289.30
	-2.05	-65.7	108.4	12.1				
	-0.70	7.8	12.1	5.4				
4	1.90	102.7	-34.4	5.3	121.37	41.08	1.26	163.71
	1.30	-34.4	57.9	6.6				
	0.30	5.3	6.6	3.1				
5	0.92	41.47	-15.56	2.21	50.50	15.31	0.62	66.43
	-1.08	-15.56	23.62	2.33				
	-0.13	2.21	2.33	1.33				
6	-0.05	14.41	-5.44	0.79	17.37	4.62	0.23	22.22
	0.77	-5.44	7.33	0.71				
	0.02	0.79	0.71	0.48				
7	0.40	4.49	-1.23	0.28	5.06	1.89	0.07	7.02
	-0.52	-1.23	2.40	0.23				
	0.00	0.28	0.23	0.14				

В табл. 4 в качестве индикатора этой зависимости представлены значения ковариации проекций вектора $\vec{a}_k$ и их коэффициенты корреляции.

Последний столбец в табл. 4 характеризует «векторную» сходимость ряда (1), дополняя и упрощая скалярные величины из табл. 3.

Временные ряды трехкомпонентных векторных коэффициентов $\vec{a}_k(t)$ в (1) позволяют описать связность вертикальных эпюр скорости $\vec{U}(z, t)$ в терминах инвариантов ковариационного тензора $K_{\vec{a}}(\tau)$. Как показано в работах [8, 9], линейный инвариант этого тензора $I_1(\tau)$ равен сумме автоковариационных функций проекций вектора $\vec{a}_k(t)$, а индикатор вращения $\vartheta(\tau)$ является вектором с компонентами, равными разности взаимных ковариационных функций проекций $\vec{a}_k(t)$. На рис. 2 представлены графики $I_1(\tau)$ и индикатора вращения $\vartheta(\tau)$ для первых пяти коэффициентов $\vec{a}_k(t)$ в (1) для реализации 6. Из

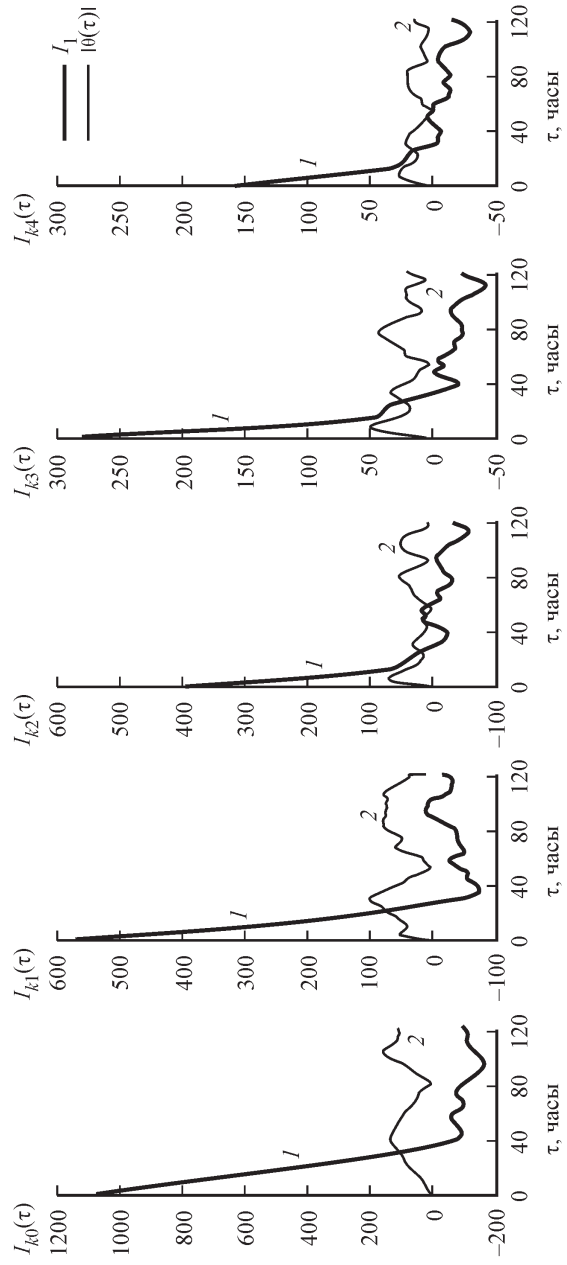


Рис. 2. Линейные инварианты и индикатор вращения для коэффициентов $\tilde{a}_k(t)$.
 $1 — I_1$, $2 — |\theta(\tau)|$.

рисунка видно, что дисперсия $\vec{a}_k(t)$ уменьшается с номером k (т. е. подтверждает значения из табл. 4), $I_1(\tau)$ уменьшается по τ , пересекает нулевой уровень при сдвиге τ на 40 ч (т. е. для эпюры течений характерна синоптическая изменчивость). Вращательные движения в трех взаимно перпендикулярных плоскостях присутствуют в изменениях скорости течения, так как $\vartheta(\tau) \neq 0$.

— Итак, базис (4) прост, так как вычисляется по рекуррентному алгоритму, однообразен, так как для всех проекций он одинаков, геометрически интерпретируем в виде вертикальной линии (при $k = 0$), наклонной прямой линии (при $k = 1$), парабол различного порядка (при $k = 2, \dots$).

— Ряд (1) сходится слабо, так как для приемлемой аппроксимации (6) профиля из 11 горизонтов скорости течений требуется до 7 членов для каждой из проекций (табл. 3) и 4—5 членов для векторов (табл. 4).

— Статистический анализ временных рядов коэффициентов $\vec{a}_k(t)$ позволяет упростить процедуры многомерного статистического анализа эпюр $\vec{U}(z, t)$.

— Базис (4) формален, так как не учитывает характерных особенностей процесса $\vec{U}(z, t)$.

Разложение вертикального профиля $\vec{U}(z, t)$ по системе $\varphi_k(z)$ естественных ортогональных функций (ЕОФ). Наилучшим приближением функции $\zeta(z_k)$, заданной на конечной системе точек (z_k) , является ее разложение по системе ЕОФ, интерпретируемой как система собственных векторов матрицы дисперсии многомерной случайной величины ζ_k .

Для метеорологических процессов и полей этот подход использован в работе [11] для вертикального распределения двумерного вектора скорости течения — в работе [6].

Для каждого из трех компонент вектора $\vec{U}(z, t)$ матрицы дисперсии D_{ij}^u , D_{ij}^v , D_{ij}^w симметричны, на их диагонали стоят дисперсии проекций на системе горизонтов z_k , а вне диагонали — ковариации.

В качестве примера такие матрицы даны в табл. 5. Они вычислены по выборке 6.

На рис. 3 представлены графики ЕОФ как собственные векторы различных матриц из табл. 5.

Из рис. 3 видно, что графики ЕОФ могут быть аппроксимированы параболлами разного порядка, но они упорядочены по вкладу, характеризующему собственными значениями λ_i .

В табл. 6 приведены значения λ_i для всех реализаций из табл. 1.

Из табл. 6 видно, что модель (2) обладает лучшей сходимостью, чем (1). В зависимости от условий (смена номера реализации) базис меняется, числа λ_i меняются соответственно. Таким образом, можно сделать вывод, что базис ЕОФ более предпочтителен, чем алгебраический. Однако, сопоставляя (1) и (2), легко прийти к выводу, что коэффициенты разложения (2) не являются классификационными переменными (из-за отличия компонентных базисных функций).

Коэффициенты разложения вычисляются по формуле

$$a_k = \sum_{j=1}^m \zeta(z_j) \varphi_{kj}, \quad (10)$$

которая аналогична (5) с учетом обозначений $\varphi_{kj} \equiv \varphi_k(z_j)$ и ортонормированности ЕОФ, обладающих свойством $\sum_{j=1}^m \varphi_{kj}^2 = 1$. Очевидно, что собственные

Таблица 5
а) Матрица 11×11 дисперсий среднечасовых значений U (793 ч)

Горизонт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	479.7	47.0	9.0	0.2	-0.6	-1.2	-3.0	-1.8	1.3	5.2	7.3
2	47.0	42.4	33.1	26.8	20.7	16.1	13.2	11.8	10.5	9.8	9.5
3	9.0	33.1	34.8	30.6	24.6	19.9	16.7	15.0	13.3	12.3	12.1
4	0.2	26.8	30.6	29.9	25.9	21.8	18.5	16.4	14.6	13.4	13.1
5	-0.6	20.7	24.6	25.9	25.6	23.4	20.2	17.8	15.7	14.2	14.0
6	-1.2	16.1	19.9	21.8	23.4	24.0	22.0	19.4	17.0	15.5	15.0
7	-3.0	13.2	16.7	18.5	20.2	22.0	22.5	21.0	18.6	17.1	16.4
8	-1.8	11.8	15.0	16.4	17.8	19.4	21.0	21.5	20.5	19.4	18.7
9	1.3	10.5	13.3	14.6	15.7	17.0	18.6	20.5	22.0	22.0	21.5
10	5.2	9.8	12.3	13.4	14.2	15.5	17.1	19.4	22.0	24.1	24.8
11	7.3	9.5	12.1	13.1	14.0	15.0	16.4	18.7	21.5	24.8	27.9

б) Матрица 11×11 дисперсий среднечасовых значений V' (793 ч)

Горизонт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	985.4	197.6	150.9	130.0	114.5	102.2	82.1	57.1	33.3	13.1	0.1
2	197.6	166.6	146.6	131.8	116.1	102.4	88.2	71.4	55.6	41.6	31.6
3	150.9	146.6	139.0	126.5	111.8	98.4	84.5	68.3	53.2	39.4	30.0
4	130.0	131.8	126.5	118.4	106.8	94.8	81.8	66.7	52.3	39.0	29.8
5	114.5	116.1	111.8	106.8	99.7	90.6	78.8	64.7	51.0	38.4	29.5
6	102.2	102.4	98.4	94.8	90.6	85.2	75.6	62.7	49.7	37.7	29.1
7	82.1	88.2	84.5	81.8	78.8	75.6	69.9	59.9	48.4	37.3	29.1
8	57.1	71.4	68.3	66.7	64.7	62.7	59.9	54.4	46.1	36.6	28.9
9	33.3	55.6	53.2	52.3	51.0	49.7	48.4	46.1	42.1	35.1	28.3
10	13.1	41.6	39.4	39.0	38.4	37.7	37.3	36.6	35.1	31.8	27.1
11	0.1	31.6	30.0	29.8	29.5	29.1	29.1	28.9	28.3	27.1	25.2

в) Матрица 11×11 дисперсий среднечасовых значений W' (793 ч)

Горизонт	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	26.88	1.319	0.362	0.189	0.082	0.071	0.088	0.072	-0.007	-0.028	-0.015
2	1.319	0.300	0.053	0.020	0.013	0.009	0.010	0.009	0.005	0.006	0.008
3	0.362	0.053	0.083	0.045	0.026	0.015	0.015	0.015	0.006	0.004	0.008
4	0.189	0.020	0.045	0.057	0.036	0.019	0.016	0.015	0.006	0.000	-0.007
5	0.082	0.013	0.026	0.036	0.047	0.026	0.017	0.017	0.010	0.002	-0.004
6	0.071	0.009	0.015	0.019	0.026	0.036	0.023	0.017	0.013	0.006	0.000
7	0.088	0.010	0.015	0.016	0.017	0.023	0.033	0.021	0.013	0.006	0.000
8	0.072	0.009	0.015	0.015	0.017	0.017	0.021	0.031	0.019	0.009	0.003
9	-0.007	0.005	0.006	0.006	0.010	0.013	0.013	0.019	0.026	0.015	0.008
10	-0.028	0.006	0.004	0.000	0.002	0.006	0.006	0.009	0.015	0.025	0.017
11	-0.015	0.008	0.008	-0.007	-0.004	0.000	0.000	0.003	0.008	0.017	0.036

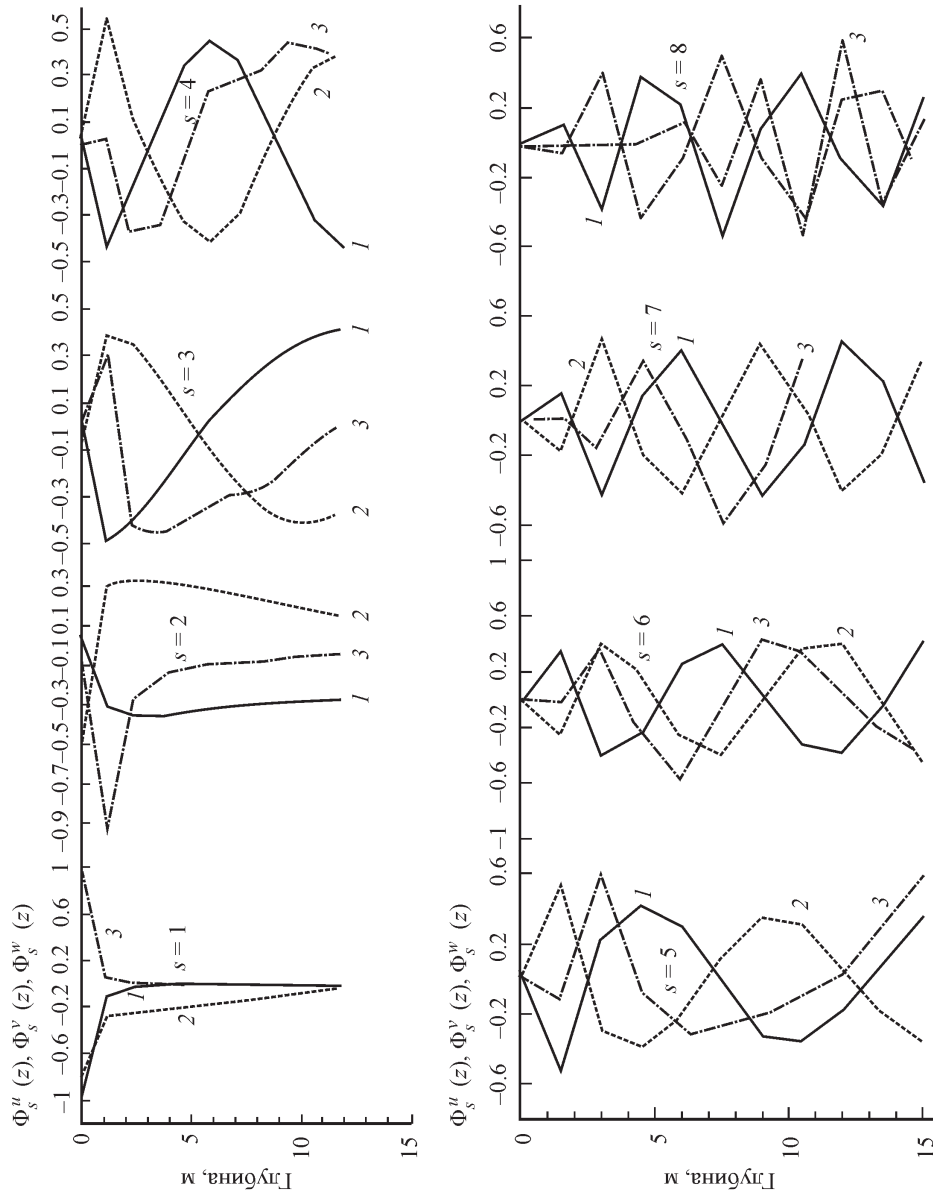


Рис. 3. Базисы $\Phi_s^u(z)$, $\Phi_s^v(z)$, $\Phi_s^w(z)$ ЕОФ для реализации 6.
1 — $\Phi_s^u(z)$, 2 — $\Phi_s^v(z)$, 3 — $\Phi_s^w(z)$.

числа λ_k представляют собой дисперсии соответствующих коэффициентов (10). Следовательно, вместо (8) скорость сходимости определяется величиной

$$\bar{\delta}_s^2 = \sum_{j=1}^m D_j - \sum_{j=1}^s \lambda_j. \quad (11)$$

Следует отметить, что представление (2) отличается от (1) тем, что у каждой из проекций существует собственный базис. Это означает, что $a_k^{(i)}$ не могут быть интерпретированы как проекции векторного коэффициента $\bar{a}_k$.

В то же время базисы ЕОФ $\varphi_k^{(i)}$ для проекций требуют проверки на их ортогональность. В табл. 7 приведены результаты вычислений скалярных произведений $(\varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)})$ базисных векторов ЕОФ проекций (u, v, w) скорости течений $\vec{U}(z, t)$ и угла $\psi = \arccos(\varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)})$ в радианах.

Из табл. 7 видно, что скалярные произведения отличны от 0, т. е. угол ψ не равен 90° .

Разложение вертикального профиля $\vec{U}(z, t)$ по системе $\varphi_k(z)$ векторных естественных ортогональных функций (ВЕОФ). В работе [5] сформулировано понятие «векторной естественной ортогональной функции» как собственного вектора $\bar{\varphi}_{kj}$ блочной матрицы дисперсии

$$D_z^{\vec{U}} = \begin{pmatrix} D_1 & \dots & K_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{ji} & \dots & D_m \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где по диагонали стоят матрицы дисперсии $D_{\vec{U}}$ на каждом из горизонтов, а вне диагонали — взаимно ковариационные матрицы проекций вектора $\vec{U}$ между горизонтами. Очевидно, если использовать все 11 горизонтов (табл. 1), то порядок матрицы (12) будет (33×33) .

Для наглядности пример блочной матрицы (12) дан в табл. 8 только для трех горизонтов.

На рис. 4 приведен покомпонентно векторный базис $\bar{\varphi}_k(z)$ как собственный вектор матрицы (12) размерности (33×33) , а в табл. 9 дан перечень собственных чисел этой матрицы для реализации № 6. Согласно табл. 9, сходимость ряда (3) быстрее, чем в (1) и (2), она определяется по собственным числам матрицы (12), которые интерпретируются как дисперсии коэффициентов

$$a_k = (\vec{U}_j \cdot \bar{\varphi}_{kj}). \quad (13)$$

Для того чтобы подчеркнуть различие представлений (2) и (3), в табл. 10 приведено сопоставление скалярных базисов ЕОФ в (2) и проекций векторного базиса ВЕОФ в (3). Даже не углубляясь в детали различия этих таблиц, напомним, что базисы в сущности различны, так как в (2) они самостоятельны, а в (3) — единое целое. Этот подход позволяет ввести представление вертикальной эпюры скорости течений в виде (3), где базис $\bar{\varphi}_k(z)$ — детерминированная вектор-функция, а коэффициенты $a_k(t)$ — скалярный случайный процесс. В отличие от формального алгебраического (скалярного) базиса $\varphi_k(z)$ в

Таблица 6
Собственные значения λ_i

	1-й отрезок			2-й отрезок			3-й отрезок			4-й отрезок			5-й отрезок		
	u^*	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w
λ_1	1307.0	2194.0	14.45	151.7	242.6	28.01	600.6	785.0	21.20	714.6	1142.0	33.82	2133.0	966.4	26.32
λ_2	249.4	72.5	3.02	126.3	117.1	15.51	124.1	58.3	9.02	191.1	42.0	0.98	192.2	68.9	2.50
λ_3	138.0	43.4	2.03	101.0	119.5	11.22	66.7	28.6	1.87	47.1	26.7	0.22	57.7	40.0	0.29
λ_4	36.1	26.4	1.36	88.2	86.5	6.78	39.5	23.6	0.37	25.9	19.6	0.06	28.3	17.8	0.09
λ_5	19.8	19.0	0.22	66.6	73.4	5.15	16.7	7.1	0.16	8.6	10.4	0.05	12.8	8.9	0.06
λ_6	12.8	10.7	0.32	19.5	3.1	0.07	8.7	6.3	0.05	4.4	5.7	0.03	7.0	5.1	0.04
λ_7	2.1	1.7	0.49	6.0	1.2	0.06	3.8	4.8	0.04	2.4	3.9	0.02	3.4	2.8	0.01
λ_8	3.0	2.6	0.67	1.5	0.6	0.01	2.2	-2.0	0.02	1.4	2.1	0.01	2.1	1.5	0.02
λ_9	5.2	6.7	1.04	0.5	0.3	0.02	0.7	2.0	0.02	0.6	1.1	0.01	1.0	0.9	0.02
λ_{10}	7.2	6.4	0.84	0.1	0.2	0.02	0.1	0.4	0.01	0.3	0.2	0.01	0.5	0.5	0.02
λ_{11}	8.6	4.9	0.93	0.3	0.1	0.03	0.3	0.8	0.01	0.2	0.5	0.02	0.3	0.3	0.03

	6-й отрезок			7-й отрезок			8-й отрезок			9-й отрезок			10-й отрезок		
	u	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w
λ_1	1213.1	485.4	26.95	1370.0	281.4	11.33	52.0	28.4	0.20	2182.0	408.0	17.65	2585.0	629.7	19.60
λ_2	515.3	190.2	0.25	274.6	184.9	0.31	22.8	8.6	0.09	240.9	79.8	1.70	464.5	146.3	17.76
λ_3	58.2	50.9	0.15	70.4	68.5	0.13	12.0	4.1	0.06	77.8	37.5	0.18	104.5	46.2	0.24
λ_4	18.6	16.1	0.07	15.0	13.8	0.11	4.7	2.1	0.05	27.8	17.2	0.06	38.8	15.3	0.13
λ_5	6.2	6.2	0.05	4.8	8.9	0.04	1.7	2.0	0.03	12.5	8.0	0.04	14.8	7.4	0.06
λ_6	3.5	2.9	0.02	2.2	4.1	0.02	0.9	1.2	0.02	5.9	4.7	0.03	5.8	4.7	0.05
λ_7	1.6	1.5	0.02	0.9	1.7	0.02	0.5	0.7	0.01	3.1	2.7	0.02	3.0	2.2	0.03
λ_8	0.7	0.6	0.01	0.4	0.9	0.01	0.3	0.2	0.01	1.7	1.6	0.01	1.5	1.3	0.02
λ_9	0.3	0.4	0.01	0.2	0.4	0.01	0.2	0.4	0.02	0.8	0.8	0.01	0.9	0.8	0.01
λ_{10}	0.1	0.1	0.01	0.1	0.2	0.01	0.1	0.4	0.01	0.4	0.4	0.02	0.2	0.4	0.01
λ_{11}	0.2	0.1	0.01	0.1	0.1	0.01	0.2	0.3	0.02	0.2	0.3	0.02	0.4	0.3	0.01

Примечание. * u — на восток, v — на север, w — вверх.

Таблица 7
 Скалярные произведения $(\varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)})$ базисных векторов ЕОФ проекций (u, v, w) скорости течений $\vec{U}(z, t)$

S	$\varphi_S^{(u)} \varphi_S^{(v)}$	Ψ	$\varphi_S^{(u)} \varphi_S^{(w)}$	Ψ	$\varphi_S^{(v)} \varphi_S^{(w)}$	Ψ
1	0.87	0.52	-1.00	3.14	~0.85	2.59
2	-0.86	2.61	0.62	0.90	-0.59	2.20
3	-0.97	2.90	-0.03	1.60	0.16	1.41
4	-0.98	2.94	-0.07	1.64	0.18	1.39
5	-0.97	2.90	0.41	1.15	-0.57	2.18
6	-0.98	2.94	-0.51	2.11	0.59	0.94
7	-0.99	3.00	0.52	1.02	-0.56	2.17
8	-0.98	2.94	0.05	1.52	0.08	1.49
9	-0.94	2.79	-0.14	1.71	0.46	1.09
10	0.96	0.28	0.07	1.50	0.20	1.37
11	-0.97	2.90	-0.19	1.76	0.40	1.16

Таблица 8
 Блочная матрица дисперсии $D_z^{\vec{v}}$

		1			5			11		
		u	v	w	u	v	w	u	v	w
1	u	479.73	-299.27	63.86	-0.60	21.67	-0.34	7.30	4.86	-0.04
	v	-299.27	985.36	72.47	66.89	114.50	1.40	57.38	0.10	-0.75
	w	63.86	72.47	26.88	6.86	15.69	0.082	6.43	-2.64	-0.015
5	u	-0.60	66.89	6.86	25.63	41.12	0.37	14.00	12.46	-0.43
	v	21.67	114.50	15.69	41.12	99.72	0.90	34.76	29.50	-0.87
	w	-0.34	1.40	0.082	0.37	0.90	0.05	0.24	0.20	-0.004
11	u	7.30	57.38	6.43	14.00	34.76	0.24	27.93	17.64	-0.43
	v	4.86	0.10	-2.64	12.46	29.50	0.20	17.64	25.16	-0.38
	w	-0.04	-0.75	-0.015	-0.43	-0.87	-0.004	-0.43	-0.38	0.04

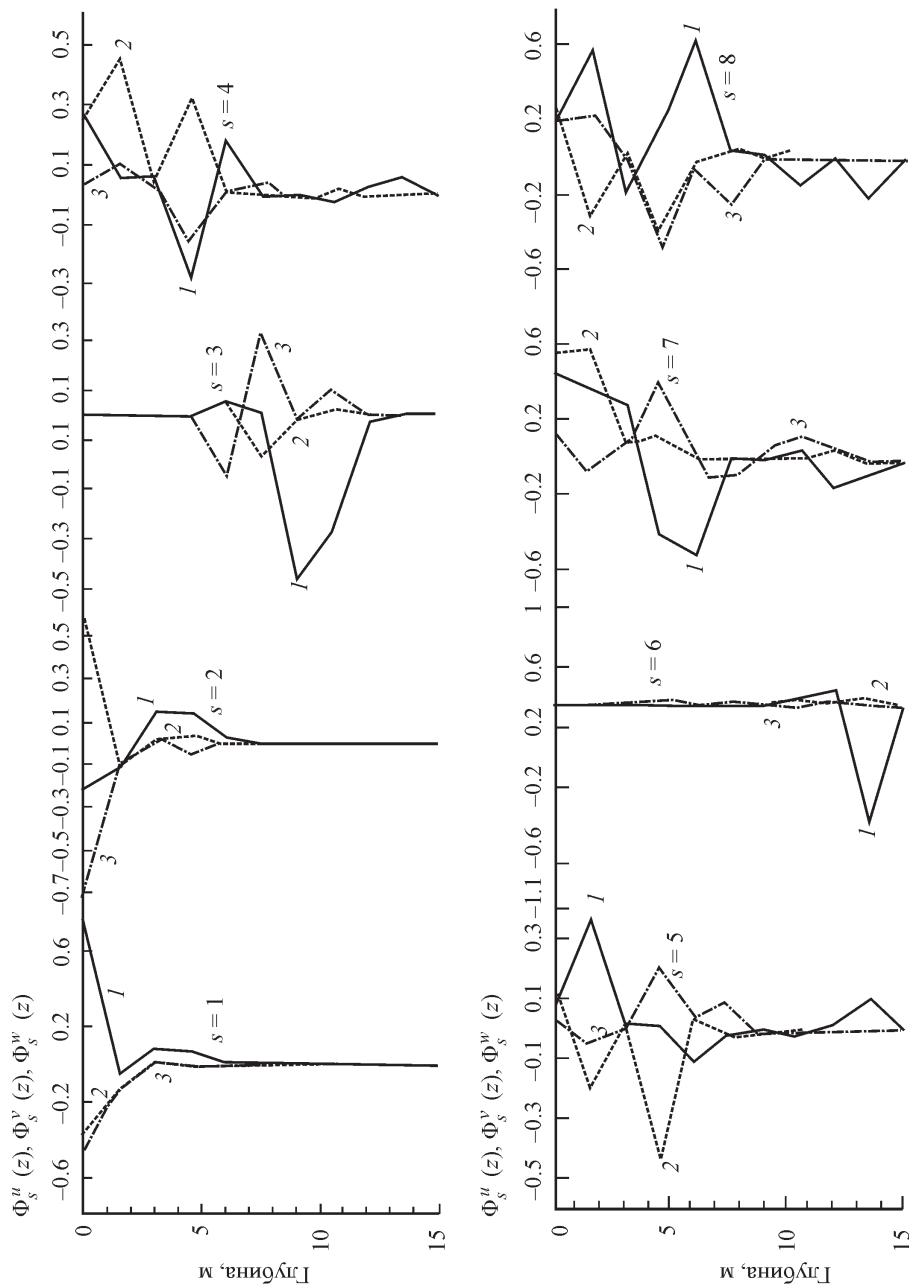
Рис. 4. Векторный базис $\vec{\Phi}_s(z)$.1 — $\Phi_s^u(z)$, 2 — $\Phi_s^v(z)$, 3 — $\Phi_s^w(z)$.

Таблица 9
Собственные числа λ

λ													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	33
1364.8	760.2	287.2	61.5	42.7	28.0	16.7	11.4	11.4	16.2	12.9	6.1	...	0.02

Таблица 10
Базисы ЕОФ и ВЕОФ для 11 горизонтов реализации № 6

Горизонт	Базисы ЕОФ											
	λ_1			λ_2			λ_3			λ_4		
	u	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w
1	-0.99	-0.83	1.00	0.07	-0.55	0.05	0.05	-0.10	0.00	0.06	-0.01	0.00
2	-0.11	-0.29	0.05	-0.31	0.31	-0.92	-0.49	0.39	0.36	-0.44	0.54	0.02
3	-0.03	-0.25	0.01	-0.36	0.33	-0.27	-0.40	0.35	-0.43	-0.18	0.11	-0.37
4	-0.01	-0.22	0.01	-0.36	0.32	-0.15	-0.28	0.22	-0.47	0.08	-0.13	-0.34
5	*	-0.20	*	-0.34	0.30	-0.13	-0.12	0.05	-0.42	0.33	-0.34	-0.05
6	*	-0.18	*	-0.32	0.28	-0.09	0.03	-0.10	-0.32	0.45	-0.41	0.24
7	*	-0.15	*	-0.31	0.26	-0.08	0.15	-0.24	-0.29	0.37	-0.30	0.28
8	*	-0.12	*	-0.30	0.23	-0.08	0.24	-0.35	-0.27	0.14	-0.08	0.33
9	*	-0.09	*	-0.29	0.20	-0.06	0.32	-0.41	-0.17	-0.11	0.16	0.43
10	*	-0.06	*	-0.28	0.17	-0.05	0.38	-0.41	-0.07	-0.32	0.34	0.42
11	*	-0.04	*	-0.28	0.15	-0.05	0.41	-0.36	0.01	-0.43	0.40	0.37

Таблица 10 (продолжение)

Горизонт	Базисы ВЕОФ											
	λ_1			λ_2			λ_3			λ_4		
	u	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w
1	0.77	-0.37	-0.45	-0.22	0.59	-0.72	-0.01	0.00	0.00	0.27	0.27	0.04
2	-0.05	-0.14	-0.13	-0.11	-0.10	-0.10	0.00	0.00	0.00	0.05	0.45	0.10
3	0.09	0.02	0.02	0.15	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.06	0.02	0.02
4	0.07	*	-0.02	0.13	0.03	-0.04	0.00	0.00	0.00	-0.27	0.32	-0.15
5	*	*	*	0.03	-0.01	-0.01	0.05	0.06	-0.25	0.18	*	0.01
6	*	*	*	*	*	-0.01	0.01	-0.17	0.34	0.00	*	0.04
7	*	*	*	*	*	*	-0.66	-0.02	-0.02	0.00	*	-0.01
8	*	*	*	*	*	*	-0.46	0.03	0.10	-0.02	*	-0.02
9	*	*	*	*	*	*	-0.04	*	*	0.03	*	-0.01
10	*	*	*	*	*	*	*	*	*	0.06	*	*
11	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Примечание. * — значения пренебрежимо малы.

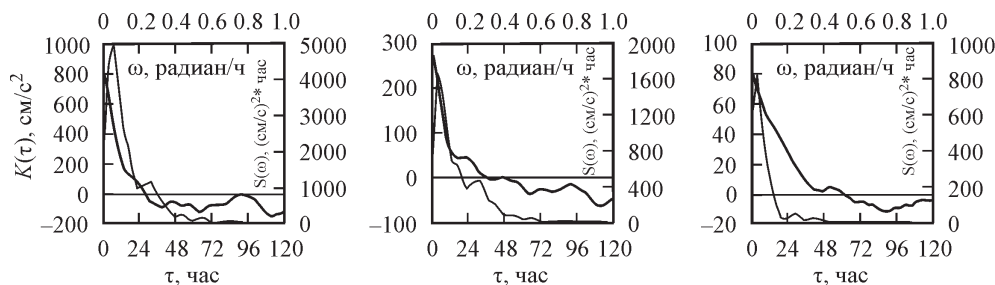


Рис. 5. Ковариационные функции и спектральные плотности скалярных рядов a_k .

(1), базис $\vec{\varphi}_k(z)$ является собственным для матрицы (12), так как он сохраняет целостность и взаимосвязь трех проекций (u , v , w), не разрывая их на части, как в (2), а также общую взаимосвязь между всеми горизонтами.

На рис. 5 приведены ковариационные функции и спектральные плотности скалярных временных рядов коэффициентов (13). Сопоставляя рис. 2 и 5, не представляет труда убедиться в их сходстве, хотя в (1) базис скалярный формальный, а в (3) векторный и собственный. Отсюда можно сделать вывод о том, что временная изменчивость вертикальных эпюр скорости течения (даже с различной степенью их детализации) подчинена общим закономерностям синоптической изменчивости гидрометеорологических процессов и полей. В частности, ковариационные функции имеют вид экспоненциально-косинусных функций (с различными параметрами — дисперсия, декремент затухания, нули коррелограмм), а спектральные плотности характеризуют краснотумовый фон, следовательно, синоптическая изменчивость вертикальной структуры скорости течений может быть описана в терминах случайных процессов авторегрессии скользящего среднего АРСС (2,1) [2, 4].

Выводы

1. Доплеровский профилограф течений ADCP позволяет существенно расширить наши знания о вертикальной структуре морских течений.

2. Сопоставление трех подходов к статистическому анализу вертикальных эпюр скорости течений через их представление в виде ортогональных разложений $\vec{U}(z, t)$ с различными базисами — алгебраическим (1), ЕОФ (2), ВЕОФ (3) — позволило выявить достоинства и недостатки каждого, но заставило воздержаться от категорических рекомендаций выбора базиса.

3. Математической моделью временных рядов эпюр трехкомпонентного вектора $\vec{U}(z, t)$, $z \in Z$, $t \in T$ является многомерная случайная функция, поэтому для классификации этих эпюр, изменчивых во времени и зависящих от многих факторов, необходимо использовать не только процедуры снижения мерности (обсуждаемые в настоящей работе), но и процедуры кластерного, факторного и дискриминантного анализа.

В настоящей работе основное внимание обращено на синоптическую изменчивость течений, которую можно охарактеризовать и по среднесуточным значениям. Прибор ADCP позволяет проанализировать и внутрисуточные флюктуации скорости течений.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 гг.

Список литературы

- [1] Бельшев А. П., Клеванцов Ю. П., Рожков В. А. Вероятностный анализ морских течений. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 264 с.
- [2] Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка натуральных данных. М.: Мир. 1980. 536 с.
- [3] Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. Тойбнер, 1981. 720 с.
- [4] Бухановский А. В., Захарченко Е. Н., Иванов Н. Е., Клеванцов Ю. П., Рожков В. А. Вероятностный анализ и моделирование вертикально неоднородного океанологического поля // Навигация и гидрография. 1999, № 9. С. 86—103.
- [5] Бухановский А. В., Рожков В. А. Многомерный статистический анализ связанных гидрометеорологических полей // Труды ГОИН. 2002, вып. 208. С. 338—364.
- [6] Василенко В. М., Мирабель А. П. О параметризации вертикальной структуры течений в тропической Атлантике с помощью статистически ортогональных функций // Океанология. 1976. Т. 16, вып. 2. С. 220—222.
- [7] Клеванцов Ю. П., Микулинская С. М., Рожков В. А. Об анализе векторов скорости морских течений // Метеорология и гидрология. 1996, № 9. С. 96—105.
- [8] Клеванцов Ю. П., Михайлов А. Е., Рожков В. А. Статистический анализ данных измерений трехкомпонентного вектора скорости течений в восточной части Финского залива // Труды ГОИН. 2009, вып. 212. С. 89—106.
- [9] Клеванцов Ю. П., Рожков В. А., Смирнов К. Г., Сухих Н. А. Статистический анализ вертикального распределения трехкомпонентного вектора скорости морских течений // Проблемы Арктики и Антарктики. 2012. № 4(94). С. 41—51.
- [10] Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968. 620 с.
- [11] Мещерская А. В., Руховец Л. В., Юдин М. И., Яковлева Н. И. Естественные составляющие метеорологических полей. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 200 с.

Санкт-Петербург
kgsmirnov@gmail.com
* СПО ФГУ «ГОИН»
** Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило в редакцию
26 февраля 2012 г.